

МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА' 2018

Д-р М. Плюс

Домакин на 59. международна олимпиада по математика беше Румъния. Олимпиадата се проведе в гр. Клуж-Напока от 3 до 14 юли 2018 г. и в нея взеха участие 594 ученици, с 21 по-малко от миналата година. Между участниците имаше 60 девойки. Представиха се общо 107 държави, с 4 по-малко от миналогодишния рекорд 111 в Рио де Жанейро, Бразилия. Беше спазен традиционният регламент, който предвижда приблизително половината състезатели да получават медали в отношение 1:2:3 (също приблизително) на златните, сребърните и бронзовите. Журито на олимпиадата в Румъния разпреди общо 289 медала, от които 48 златни с долна граница 31 точки вкл., 98 сребърни с граници от 25 до 30 точки вкл. и 143 бронзови с граници от 16 до 24 точки вкл. Българският отбор заслужи 1 златен, 3 сребърни и 1 бронзов медал, като само един не получи медал. Общото представяне е в рамките на очакванията и затвърждава тенденцията за последните повече от 10 години България да е извън групата на водещите държави. Ако има нещо похвално в тазгодишното българско участие, то се ограничава с наличието на златен медал, който е първият след 2012 г. Заслугите за това са на учителката Петя Тодорова от СМГ, която, въпреки че без да има вина беше въввлечена в скандали от доносника Кадмий и протезето му – вече бивш директор на СМГ, успя да докаже своя професионализъм и подготви двамата най-добре представили се от българския отбор – Борислав Антов и Иван-Александър Мавров, които са нейни ученици. Останалите български участници бяха Константин Гаров (ПМГ „Н. Обрешков“, Бургас), Кирил Бангачев (СМГ „П. Хилендарски“), Атанас Динев (ПМГ „Н. Обрешков“, Бургас) и Кристиан Василев. В отборното класиране България е на незавидното 21. място със 146 точки, “заслугата” за което е без съмнение на еднометровия главен лаборант от Лабораторията на Пазарджишкия доносник Кадмий. Добри деца, добри учители, но калпава заключителна подготовка, калпаво “научно” ръководство и резултатите са налице.

Победители в тазгодишната олимпиада са двама ученици, постигнали максималните 42 точки – Джеймс Лин от САЩ и Агнио Банерджи от Великобритания. По-долу са резултатите на нашите състезатели, както и класирането по държави.



59. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2018 Г.**КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ**

резултати по задачи	I	II	III	IV	V	VI	точки	място	медал
Борислав Антоу	7	7	2	7	7	1	31	34-48	златен
Иван-Александър Мавров	7	7	0	7	7	2	30	49-60	сребърен
Константин Гаров	7	7	0	7	6	2	29	61-86	сребърен
Кирил Бангачев	7	3	0	7	7	1	25	131-146	сребърен
Атанас Динев	7	4	0	7	1	0	19	215-227	бронзов
Кристиан Василев	7	2	0	0	1	2	12	338-349	–
отборен резултат	42	30	2	35	29	8	146	21	

59. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2018 Г.**КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ ПО ДЪРЖАВИ**

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой уча-стни-ци	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
1	САЩ	6	42	41	14	42	42	31	212	5	1	0
2	Русия	6	42	42	11	42	41	23	201	5	1	0
3	Китай	6	42	37	17	42	42	19	199	4	2	0
4	Украйна	6	42	34	12	42	42	14	186	4	2	0
5	Тайланд	6	42	38	3	42	42	16	183	3	3	0
6	Тайван	6	42	42	15	37	25	18	179	3	1	2
7	Корея	6	42	42	3	42	36	12	177	3	3	0
8	Сингапур	6	41	42	3	42	37	10	175	2	3	1
9	Полша	6	42	39	7	42	37	7	174	1	5	0
10	Индонезия	6	42	38	3	42	36	10	171	1	5	0
11	Австралия	6	42	34	13	42	31	7	169	2	3	1
12	Великобритания	6	42	30	7	37	33	12	161	1	4	0
13	Япония	6	40	37	3	32	36	10	158	1	3	2
13	Сърбия	6	42	37	5	35	35	4	158	2	2	2
15	Унгария	6	42	28	2	41	35	9	157	0	4	2
16	Канада	6	42	27	1	42	36	8	156	0	5	1

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой уча- стни- ци	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
17	Италия	6	42	31	1	37	37	6	154	0	4	2
18	Казахстан	6	42	29	0	42	33	5	151	0	4	2
19	Иран	6	42	37	6	39	18	8	150	1	3	1
20	Виетнам	6	42	40	7	25	29	5	148	1	2	3
21	България	6	42	30	2	35	29	8	146	1	3	1
22	Хърватия	6	35	33	0	36	38	3	145	0	4	1
23	Словакия	6	37	28	0	42	32	1	140	0	3	3
24	Швеция	6	42	23	5	42	24	2	138	1	2	2
24	Турция	6	42	30	7	31	26	2	138	1	1	4
26	Изrael	6	38	30	2	31	26	9	136	0	2	4
27	Грузия	6	42	17	0	40	23	11	133	0	1	5
28	Бразилия	6	35	30	1	42	13	11	132	1	0	4
28	Индия	6	36	28	0	28	33	7	132	0	3	2
28	Монголия	6	42	28	0	42	18	2	132	0	1	5
31	Германия	6	30	23	3	42	24	9	131	1	2	1
32	Армения	6	42	25	0	37	26	0	130	0	2	4
33	Франция	6	30	22	1	42	23	11	129	1	1	4
33	Румъния	6	41	33	0	25	24	6	129	1	1	2
35	Перу	6	42	24	0	33	24	2	125	0	2	3
36	Мексико	6	36	20	0	38	23	6	123	0	1	4
36	Холандия	6	35	22	0	42	23	1	123	0	1	4
38	Филипини	6	42	26	3	33	16	1	121	1	1	2
39	Аржентина	6	36	16	0	39	22	2	115	0	1	4
39	Чехия	6	36	22	0	35	19	3	115	0	2	2
41	Бангладеш	6	42	30	3	27	10	2	114	1	0	3
42	Словения	6	33	14	4	37	14	2	104	0	1	1
43	Босна и Херцеговина	6	39	17	0	36	10	1	103	0	0	4
43	Таджикистан	6	42	27	0	16	17	1	103	0	0	5
45	Беларус	6	32	14	1	28	25	2	102	0	0	4

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой уча- стни- ци	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
45	Нова Зеландия	6	35	19	0	34	14	0	102	0	1	2
47	Белгия	6	35	16	0	28	10	3	92	0	0	4
48	Малайзия	6	35	18	0	18	18	1	90	0	0	2
49	Хонг Конг	6	32	22	0	14	17	4	89	0	0	2
50	Молдова	6	35	14	0	18	16	3	86	0	0	3
51	Естония	6	25	16	0	26	12	1	80	0	1	0
52	Литва	6	35	10	0	20	12	0	77	0	0	2
52	Португалия	6	24	13	0	28	11	1	77	0	0	2
54	Гърция	6	36	11	0	16	9	2	74	0	0	2
54	Испания	6	36	9	0	18	11	0	74	0	0	2
56	Норвегия	6	21	11	0	24	15	2	73	0	0	2
57	Австрия	6	15	18	0	20	19	0	72	0	0	3
58	Дания	6	23	15	0	22	10	1	71	0	0	3
59	Финландия	6	21	13	0	25	10	1	70	0	0	2
60	Саудитска Арабия	6	22	16	0	15	14	2	69	0	1	1
60	Сирия	6	30	13	0	9	17	0	69	0	0	2
62	Южна Африка	6	31	9	0	16	9	1	66	0	0	1
63	Коста Рика	5	29	7	0	19	10	0	65	0	0	2
63	Туркменистан	6	36	9	0	16	3	1	65	0	0	1
65	Макао	6	31	12	0	13	5	0	61	0	0	1
66	Колумбия	6	29	9	0	16	3	2	59	0	0	1
67	Исландия	6	22	4	0	27	3	0	56	0	0	1
68	Швейцария	6	13	11	0	23	5	0	52	0	0	1
69	Азербайджан	6	28	8	0	9	3	2	50	0	0	0
70	Тунис	6	27	7	0	10	5	0	49	0	0	0
71	Еквадор	6	19	4	0	19	4	2	48	0	0	0
72	Шри Ланка	6	28	6	0	9	4	0	47	0	0	1
73	Мароко	6	27	6	0	6	6	1	46	0	0	0
73	Пуерто Рико	6	19	4	0	13	10	0	46	0	0	1

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой уча- стни- ци	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
75	Кипър	5	13	11	0	18	3	0	45	0	0	1
76	Ирландия	6	19	2	0	19	2	1	43	0	0	1
77	Киргизстан	6	28	5	0	7	1	0	41	0	0	0
78	Латвия	6	9	12	0	13	5	1	40	0	0	0
79	Албания	6	19	3	0	6	9	0	37	0	0	0
80	Пакистан	6	21	3	0	6	5	0	35	0	0	0
81	Боливия	6	27	1	0	3	2	0	33	0	0	0
82	Македония	6	20	2	0	3	1	1	27	0	0	0
83	Нигерия	3	19	3	0	2	0	2	26	0	0	0
83	Тринидад и Тобаго	3	9	5	0	8	3	1	26	0	0	0
85	Мианмар	6	14	2	0	6	1	0	23	0	0	0
86	Косово	6	14	1	0	3	1	2	21	0	0	0
86	Панама	4	14	1	0	6	0	0	21	0	0	0
86	Узбекистан	3	16	4	0	1	0	0	21	0	0	0
89	Черна Гора	4	8	7	0	4	1	0	20	0	0	0
89	Ел Салвадор	2	14	3	0	2	1	0	20	0	0	0
91	Чили	4	1	2	0	14	2	0	19	0	0	0
92	Алжир	4	10	2	0	4	1	1	18	0	0	0
93	Люксембург	2	7	3	0	4	0	0	14	0	0	0
94	Гана	5	8	3	0	2	0	0	13	0	0	0
95	Ботсвана	6	7	0	0	4	1	0	12	0	0	0
95	Парагвай	6	7	0	0	2	3	0	12	0	0	0
97	Камбоджа	6	11	0	0	0	0	0	11	0	0	0
97	Гватемала	3	1	1	0	7	2	0	11	0	0	0
99	Египет	4	1	2	0	7	0	0	10	0	0	0
100	Ирак	6	7	0	0	1	1	0	9	0	0	0
100	Уганда	4	8	0	0	0	0	1	9	0	0	0
102	Кот д'Ивоар	6	8	0	0	0	0	0	8	0	0	0
103	Уругвай	4	0	3	0	1	3	0	7	0	0	0

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой участници	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
104	Хондурас	3	2	1	0	2	1	0	6	0	0	0
105	Непал	6	2	0	0	1	2	0	5	0	0	0
106	Венецуела	1	1	1	0	0	0	0	2	0	0	0
107	Танзания	3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Ето задачите от 59-ата международна олимпиада по математика:

Понеделник, 9 юли 2018 г.

Задача 1. Нека Γ е описаната окръжност около остроъгълен триъгълник ABC , а D и E са точки съответно върху страните AB и AC така, че $AD = AE$. Ако симетралите на отсечките BD и CE пресичат малките дъги AB и AC на Γ съответно в точки F и G , да се докаже, че правите DE и FG са успоредни или съвпадат.

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа $n \geq 3$, за които съществуват реални числа $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ така, че $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} \text{ за всяко } i = 1, 2, \dots, n.$$

Задача 3. Равностранен триъгълен масив от числа се нарича *триъгълник анти Паскал*, ако притежава следното свойство: всяко число, което не е в последния ред, е равно на абсолютната стойност на разликата на двете числа непосредствено под него. По-долу е показан пример на триъгълник анти Паскал с четири реда, образуван с помощта на естествените числа от 1 до 10.

$$\begin{array}{cccc}
 & & 4 & \\
 & 2 & 6 & \\
 5 & 7 & 1 & \\
 8 & 3 & 10 & 9
 \end{array}$$

Съществува ли триъгълник анти Паскал с 2018 реда, образуван с помощта на естествените числа от 1 до $1 + 2 + \dots + 2018$?

*Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки*

Вторник, 10 юли 2018 г.

Задача 4. Точката (x, y) в равнината се нарича *възел*, ако x и y са естествени числа, ненадминаващи 20. Първоначално всичките 400 възела са незаети. Мария и Иван последователно правят ходове, като поставят камъчета във възлите. Мария започва първа. Когато Мария е на ход, тя поставя ново червено камъче в незает възел така, че разстоянието между кои да е два възела, заети от червени камъчета, да не е равно на $\sqrt{5}$. Когато Иван е на

ход, той поставя ново синьо камъче в незает възел. (Възел, зает от синьо камъче, може да е на всякакво разстояние от зает възел.) Играта завършва, когато някой от играчите не може да направи ход. Да се намери максималното число K , за което Мария може да постави поне K червени камъчета, както и да играе Иван.

Задача 5. Известно е, че за безкрайната редица от естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ съществува естествено число $N > 1$ така, че за всяко $n \geq N$ числото

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

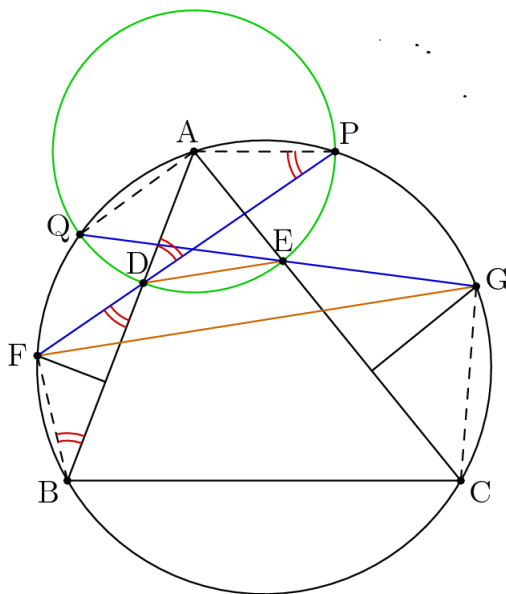
е цяло. Да се докаже, че съществува естествено число M така, че $a_m = a_{m+1}$ за всяко $m \geq M$.

Задача 6. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Нека X е такава вътрешна точка за четириъгълника, че $\angle XBA = \angle XDC$ и $\angle XCB = \angle XAD$. Да се докаже, че $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

*Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки*

Решение на задача 1.

Нека правите FD и GE пресичат Γ за втори път съответно в точките P и Q . Имаме $\angle APF = \angle FBA$ (измерват се с една и съща дъга) $= \angle FDB$ (F лежи на симетралата на BD) $= \angle ADP$ (върхни), т.е. $\angle APD = \angle ADP$, откъдето $AP = AD$. По същия начин, като използваме, че G лежи на симетралата на CE , заключаваме, че $AQ = AE$. Сега от условието $AD = AE$ следва, че $AP = AQ$, както и че точките Q, D, E и P лежат на окръжност с център A . Тогава $\angle QED = \angle QPD$ (измерват се с една и съща дъга от тази окръжност). Но $\angle QPD = \angle QPF = \angle QGF$ (измерват се с една и съща дъга от Γ). Получаваме, че $\angle QED = \angle QGF$. Сега задачата следва от факта, че последните два ъгъла са съответни при пресичането на правите DE и FG с правата QG .



Решение на задача 2.

Нека $a_{n+3} = a_3$. Ако умножим двете страни на равенството $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ по a_{i-1} за всяко $i = 2, 3, \dots, n, n+1$, получаваме

$$a_{i-1} a_i a_{i+1} + a_{i-1} = a_{i-1} a_{i+2} \Leftrightarrow (a_{i+1} - 1) a_{i-1} + a_{i-1} = a_{i-1} a_{i+2} \Leftrightarrow a_{i+1}^2 - a_{i+1} + a_{i-1} = a_{i-1} a_{i+2}.$$

След сумиране имаме $\sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} a_{i+2} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i+1}^2 - \sum_{i=2}^{n+1} a_{i+1} + \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2$, т.е.

$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^n a_i^2$. За всяко $i = 1, 2, \dots, n$ ще използваме неравенството $a_i a_{i+3} \leq \frac{a_i^2 + a_{i+3}^2}{2}$, в което равенство се достига при $a_i = a_{i+3}$. След сумиране имаме

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i a_{i+3} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 + a_{i+3}^2}{2} = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Оттук следва, че $a_i a_{i+3} = \frac{a_i^2 + a_{i+3}^2}{2}$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ и значи $a_i = a_{i+3}$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$.

Възможни са няколко случая:

Първи случай. $n \equiv 1 \pmod{3}$. Тогава

$$a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_n = a_{n+3} = a_3 = a_6 = a_9 = \dots = a_{n-1} = a_{n+2} = a_2 = a_5 = a_8 = \dots = a_{n-2} = a_{n+1} = a_1,$$

т.е. $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+2}$. От условието $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ следва например, че $a_1^2 - a_1 + 1 = 0$, което не е възможно, защото уравнението $x^2 - x + 1 = 0$ няма реални корени.

Втори случай. $n \equiv 2 \pmod{3}$. Тогава

$$a_2 = a_5 = a_8 = \dots = a_n = a_{n+3} = a_3 = a_6 = a_9 = \dots = a_{n-2} = a_{n+1} = a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_{n-1} = a_{n+2} = a_2,$$

т.е. отново $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+2}$, което, както и по-горе, е невъзможно.

Трети случай. $n \equiv 0 \pmod{3}$. Това е единствената възможност, която води до решение на задачата. Тя се реализира например при

$$2, -1, -1, 2, -1, -1, \dots, 2, -1, -1, 2, -1.$$

Задачата може да се реши и с използване на т. нар. „пренаареждащо неравенство”, което гласи следното:

Ако $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ и $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ са две редици от реални числа, то

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1 \leq x_1 y_{\sigma(1)} + x_2 y_{\sigma(2)} + \dots + x_n y_{\sigma(n)} \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

където $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ е произволна пермутация на числата $1, 2, \dots, n$.

В конкретния случай можем да считаме, че след евентуално преномериране е изпълнено $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Нека $x_i = y_i = a_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$. Доказаното по-горе

равенство $\sum_{i=1}^n a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^n a_i^2$ може да се запише във вида $\sum_{i=1}^n x_i y_{i+3} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, откъдето следва, че

$$\sigma(1) = 4, \quad \sigma(2) = 7, \quad \dots, \quad \sigma(n-3) = n-3, \quad \sigma(n-2) = 1, \quad \sigma(n-1) = 2, \quad \sigma(n) = 3, \quad \text{т.е.}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{Ще докажем, че } y_1 = y_4. \text{ Да допуснем противното, т.е. } y_4 > y_1. \text{ Но тогава}$$

$y_{n-2} \geq y_4 > y_1$, откъдето $(y_4 - y_1)(y_{n-2} - y_1) > 0$, т.е. $y_1^2 + y_{n-2} y_4 > y_1 y_4 + y_{n-2} y_1$. Последното е еквивалентно с $x_1 y_1 + x_{n-2} y_4 > x_1 y_4 + x_{n-2} y_1$. Двете събираеми в дясната страна на това

неравенство фигурират в сумата $\sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)}$ и ако към двете страни на неравенството прибавим

останалите събираеми от тази сума, ще получим $\sum_{i=1}^n x_i y_{\tau(i)} > \sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)}$, където пермутацията τ е получена от пермутацията σ , в която са разменени местата на $\sigma(1)$ и $\sigma(n-2)$. От друга страна, съгласно пренареждащото неравенство имаме $\sum_{i=1}^n x_i y_{\tau(i)} \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i$ и следователно

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sum_{i=1}^n x_i y_{\tau(i)} > \sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

което е противоречие. Като използваме процедурата от разгледаните по-горе три случая, отново заключаваме, че редицата с исканото свойство е периодична с период 3.

Коментарът, който може да се направи, е, че това е една хубава задача за неравенство, което е скрито във функционално уравнение (относно функция f от $\{1, 2, \dots, n\}$ в множеството на реалните числа).

Решение на задача 3.

Преди да изложим решение на тази задача, която се оказва частен случай на доказаното по-долу твърдение 12, ще направим някои наблюдения и ще докажем твърдения, някои от които не са свързани непосредствено с решението на задача 3, но осветляват триъгълниците анти Паскал. Първоначално ще се спрем на самото наименование. През 1654 г. в своя „Трактат за аритметичния триъгълник“ френският математик Блез Паскал (1623 – 1662) въвежда следната безкрайна триъгълна таблица от числа:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Тази таблица се нарича *триъгълник на Паскал*. Всеки ред с номер n отгоре надолу в триъгълника на Паскал е съставен от последователните биномни коефициенти $\binom{n}{k}$

($k = 0, 1, \dots, n$) в развитието на Нютоновия бином $(a+b)^n$. Кое да е число в триъгълника без периферните единици е сбор на числата, намиращи се непосредствено над него. Това обосновава понятието *триъгълник анти Паскал* от условието на разглежданата задача 3. Да отбележим, че свойството на триъгълника на Паскал интерпретира добре известното свойство на биномните коефициенти

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},$$

което се нарича *правило на Паскал*.

Нека Δ_n е триъгълник анти Паскал от ред n . С елементите на Δ_n ще конструираме две редици $b_1, b_2, \dots, b_n$ и $s_1, s_2, \dots, s_n$ по следния начин: нека $b_1 = s_1$ е най-горното число в Δ_n ; b_2 е по-голямото от двете числа непосредствено под b_1 , а s_2 е по-малкото от тях, ..., нека b_k е по-голямото от двете числа непосредствено под b_{k-1} , а s_k е по-малкото от тях за всяко $k = 3, 4, \dots, n$. Членовете на двете редици ще наричаме съответно големи (big – b) и малки (small – s) числа. В примера от условието на задачата големите числа са 4, 6, 7 и 10, а

малките са 4, 2, 1 и 3. Да обърнем внимание, че b_k е най-голямото число измежду числата на k -ия ред на Δ_n за всяко $k=1, 2, \dots, n$.

Наблюдение 1. Тъй като $b_{k-1} = b_k - s_k$ ($k=1, 2, \dots, n$), то $b_k = b_{k-1} + s_k$ и следователно $b_n = b_{n-1} + s_n = b_{n-2} + s_{n-1} + s_n = \dots = b_2 + s_3 + s_4 + \dots + s_n = b_1 + s_2 + \dots + s_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n$.

Дефиниция 1. Частен случай на Δ_n е, когато триъгълникът е образуван с числата от 1 до $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Такъв триъгълник ще означаваме с TAP_n (използваме първите букви на понятието „триъгълник анти Паскал”).

Твърдение 1. За триъгълника TAP_n е изпълнено $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказателство: Нека $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ са n -те най-малки елементи на TAP_n . Тогава $s_1 + s_2 + \dots + s_n \geq m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Заклучаваме, че

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq b_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n \geq m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

и следователно $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Наблюдение 2. От доказателството на твърдение 1. следва, че за всеки TAP_n е изпълнено $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Оттук в частност заключаваме, че най-големият елемент на TAP_n е разположен в най-долния ред на триъгълника.

Наблюдение 3. Пак от твърдение 1. следва, че числото от най-горния ред на TAP_n не може да е по-голямо от n .

Наблюдение 4. За всеки TAP_n числата от 1 до n са разположени по едно на ред. Това е така, защото числата s_k са разположени по едно на ред.

С помощта на твърдение 1. и направените наблюдения ще конструираме някои TAP_n за конкретни стойности на n .

Твърдение 2. При $n=1$ единственият TAP_1 е числото 1.

Твърдение 3. При $n=2$ са възможни четири случая на TAP_2 :

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 \ 2 & 2 \ 3 & 3 \ 1 & 1 \ 3 \end{array}$$

Това са единствените случаи, защото от наблюдение 3. следва, че числото на най-горния ред може да бъде само 1 или 2, всяко от които се представя по единствен начин като разлика на другите две.

Тъй като първият и вторият пример, а така също третият и четвъртият, са симетрични спрямо вертикалната ос на симетрия на триъгълника, ще считаме, че те са еднакви, т.е. при $n = 2$ възможните TAP_2 са два.

Твърдение 4. При $n = 3$ са възможни четири случая на TAP_3 , считайки симетричните за еднакви:

1	2	3	3
4 3	5 3	4 1	5 2
6 2 5	6 1 4	2 6 5	1 6 4

Отново сме взели предвид, че съгласно наблюдение 3. числото на най-горния ред може да бъде само 1, 2 или 3.

Твърдение 5. При $n = 4$ са възможни също четири случая на TAP_4 , считайки симетричните за еднакви:

3	3	4	4
5 2	7 4	5 1	6 2
4 9 7	2 9 5	2 7 6	1 7 5
6 10 1 8	8 10 1 6	8 10 3 9	9 10 3 8

Твърдение 6. При $n = 5$ съществува само един TAP_5 с точност до симетрия:

5
9 4
2 11 7
10 12 1 8
13 3 15 14 6

Доказателство: Ще докажем тази единственост, като разсъжденията могат да се използват за обосноваване на примерите за TAP_n при $n < 5$. Числото на най-горния ред не може да е 1, 2, 3 или 4. Ако е 1, то числата на втория ред трябва да са 6 и 5. В противен случай ще бъде нарушено свойството съгласно наблюдение 4. Но тогава за всяка от евентуалните тройки на третия ред (2,8,3), (3,9,4) и (4,10,5) ще бъде отново нарушено свойството от наблюдение 4. Ако числото на най-горния ред е 2, то числата на втория ред трябва да са 6 и 4 или 7 и 5. В първия случай (6,4) единствено възможна тройка на третия ред е (5,11,7), но не съществува подходяща четворка за четвъртия ред. Във втория случай (7,5) единствено възможна тройка на третия ред е (4,11,6), за която също не съществува подходяща четворка за четвъртия ред. Ако числото на най-горния ред е 3, то числата на втория ред трябва да са 7 и 4 или 8 и 5. Тази възможност също се отхвърля с аналогични разсъждения. Ако числото на най-горния ред е 4, то числата на втория ред трябва да са 6 и 2, 7 и 3 или 9 и 5. В първия случай (6,2) единствено възможната тройка на третия ред е (13,7,5), но не съществува подходяща четворка за четвъртия ред. Във втория случай (7,3) не съществува подходяща тройка за третия ред. В третия случай (9,5) единствено възможната тройка на третия ред е (10,1,6), но не съществува подходяща четворка за четвъртия ред.

Единствеността на примера за TAP_5 се установява по редове отгоре надолу по аналогичен начин.

Твърдение 7. Не съществува TAP_6 .

Доказателство: Да допуснем, че такъв триъгълник съществува и да означим елементите му в най-долния ред с a, b, c, d, e и f в тази последователност. Ще разглеждаме числата по модул 2. Тогава изваждането може да се замени със събиране. Елементите във втория ред отдолу нагоре са $a+b, b+c, c+d, d+e$ и $e+f$, елементите на третия ред по модул 2 са $a+c, b+d, c+e$ и $d+f$, на четвъртия ред по модул 2 са $a+b+c+d, b+c+d+e$ и $c+d+e+f$, на петия ред по модул 2 са $a+e$ и $b+f$, а на шестия ред е числото $a+b+e+f$. Сумата на всички елементи е $6a+8b+bc+8d+8e+6f$, което е четно число. От друга страна $1+2+3+\dots+21=231$ е нечетно число и това е противоречие.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & a+b+e+f \\
 & & & & a+e & b+f \\
 & & a+b+c+d & b+c+d+e & c+d+e+f & \\
 & a+c & b+d & c+e & d+f & \\
 & a+b & b+c & c+d & d+e & e+f \\
 a & b & c & d & e & f
 \end{array}$$

Да разгледаме примера TAP_5 и да отделим редиците $\{b_k\}_{k=1}^5$ и $\{s_k\}_{k=1}^5$ с линии, както е показано:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 5 & \\
 & & & & 9 & 4 \\
 & & 2 & 11 & 7 & / \\
 \backslash & 10 & 12 & 1 & 8 & \\
 13 \backslash & 3 & 15 & / & 14 & 6
 \end{array}$$

Отделянето става, като вляво и вдясно от двойката (b_5, s_5) прекарваме прави, които сключват остър ъгъл 60° с основата на TAP_5 . Това, което остава вляво и вдясно, са два равнострани триъгълника – първият с размер 1 (един ред), а вторият с размер 2 (два реда). Двата триъгълника са всъщност следните:

$$\Delta_1 \text{ (числото 13)} \text{ и } \Delta_2 = \begin{array}{cc} 8 \\ 14 & 6 \end{array}$$

Да обърнем внимание, че сборът от размерите на двата триъгълника е 3, което е с 2 по-малко от размера на TAP_5 , който е 5.

По подобен начин можем да направим отделяне в примерите TAP_4 :

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & & 3 & & \\
 & 5 & 2 & & \\
 \backslash & 4 & 9 & 7 & / \\
 6 \backslash & 10 & 1 & 8 &
 \end{array} &
 \begin{array}{ccccc}
 & & 3 & & \\
 & 7 & 4 & & \\
 \backslash & 2 & 9 & 5 & / \\
 8 \backslash & 10 & 1 & 6 &
 \end{array} &
 \begin{array}{ccccc}
 & & 4 & & \\
 & 5 & 1 & & \\
 \backslash & 2 & 7 & 6 & / \\
 8 \backslash & 10 & 3 & 9 &
 \end{array} &
 \begin{array}{ccccc}
 & & 4 & & \\
 & 6 & 2 & & \\
 \backslash & 1 & 7 & 5 & / \\
 9 \backslash & 10 & 3 & 8 &
 \end{array}
 \end{array}$$

Сборът от размерите на оставащите триъгълници е $1+1=2=4-2$.

За примерите TAP_3 имаме:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 3 & 3 \\
 4 & 5 & 4 & 5 \\
 6 & 6 & 2 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 2 & 3 & 1 & 2 \\
 5 & 1 & 6 & 6 \\
 6 & 1 & 6 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 3 & 1 & 2 & 3 \\
 4 & 1 & 6 & 4 \\
 2 & 6 & 1 & 5
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 3 & 2 & 1 & 3 \\
 5 & 2 & 6 & 5 \\
 1 & 6 & 1 & 4
 \end{array}$$

При всеки от тях размерът на оставащия триъгълник е $1=3-2$ (т.е. оставащият триъгълник се състои от едно число: 5, 4, 5 или 4 за всеки от случаите).

Наблюдение 5. При отделяне на редиците $\{b_k\}_{k=1}^n$ и $\{s_k\}_{k=1}^n$ от даден TAP_n с помощта на прави линии вляво и вдясно от двойката (b_n, s_n) , които сключват остър ъгъл 60° с основата на TAP_n , остават два триъгълника (или само един, ако двойката (b_n, s_n) е в края на реда), сумата от размерите на които е равна на $n-2$ (ако триъгълникът е един, неговият размер е $n-2$). Това е така, защото най-долният ред на TAP_n се намалява с 2 (намалява се с двойката (b_n, s_n)). Ясно е, че оставащите триъгълници (или оставащият триъгълник) са триъгълници (или триъгълник) анти Паскал.

Дефиниция 2. Оставащите триъгълници (оставащият триъгълник) в резултат на процедурата в наблюдение 5. ще наричаме отделени триъгълници (отделен триъгълник).

За отделените триъгълници можем да разглеждаме съответните им редици от големи и малки числа. Аналогично на твърдение 1. и наблюдение 2. са в сила следващите две твърдения:

Твърдение 8. За всеки TAP_n стойностите на малките числа на отделените триъгълници са числата от множеството $\{n+1, n+2, \dots, 2n-2\}$, които са разположени по едно на ред.

Твърдение 9. За всеки TAP_n най-големите стойности на големите числа на отделените триъгълници са $\frac{n(n+1)}{2}-1$ и $\frac{n(n+1)}{2}-2$, когато отделените триъгълници са два, а в случай на един отделен триъгълник най-голямата стойност на големите му числа е $\frac{n(n+1)}{2}-1$. Най-големите стойности на големите числа се реализират на най-долните редове на отделените триъгълници.

Твърдение 10. Не съществува TAP_8 .

Доказателство: Да допуснем противното и да разгледаме горните 3 реда на такъв триъгълник. Нека $b_1 = s_1 = a$, $s_2 = b$, а $b_3 = a+b$. Възможни са два случая:

Случай 1. Числото $s_3 = c$ е вдясно от b_3 . Стойността на най-лявото число на третия ред, т.е. b_3 е без значение и затова по-долу е поставен въпросителен знак на това място. Най-дясното число на третия ред е означено с x .

$$\begin{array}{ccc}
 a & & \\
 a+b & b & \\
 ? & c & x
 \end{array}$$

Тъй като малките числа на TAP_8 и на отделените триъгълници приемат всички цели стойности от 1 до $14 = 2 \cdot 8 - 2$ включително, а $a + b$ е голямо число, то $a + b \geq 15$. Това е възможно само ако стойностите на a и b са 7 и 8 в някакъв ред. Но тогава $c \leq 6$ и следователно $x = b + c \leq 8 + 6 = 14$. Това не е възможно, защото x не е малко число.

Случай 2. Числото $s_3 = c$ е вляво от $b_3 = a + b + c$. Както и в предния случай $c \leq 6$. От друга страна b_3 е най-голямото число на третия ред и следователно $x < b_3$.

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & & & & \\ a+b & & & & b \\ & & c & & a+b+c & & x \end{array}$$

Тогава $x = a + b + c - b = a + c \leq 8 + 6 = 14$ и получаваме същото противоречие както в предния случай 1.

Твърдение 11. Не съществува TAP_7 .

Няма да се спираме на доказателството на това твърдение, защото то използва аргументи както в доказателството на твърдение 10.

Твърдение 12. Не съществува TAP_n за $n > 8$.

Доказателство: Това твърдение съдържа твърдението в задача 3 като частен случай. Да допуснем, че съществува TAP_n за някое $n > 8$. Ако TAP_n има два отделени триъгълника и най-големите стойности на големите им числа са съответно A и B , то от твърдение 8. и наблюдение 1. следва, че

$$A + B \geq (n+1) + (n+2) + \dots + (2n-2) = \frac{(3n-1)(n-2)}{2}.$$

От друга страна от твърдение 8. имаме $A + B \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1 + \frac{n(n+1)}{2} - 2 = n^2 + n - 3$ и

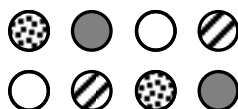
следователно $\frac{(3n-1)(n-2)}{2} \leq n^2 + n - 3 \Leftrightarrow (n-1)(n-8) \leq 0$, което е нарушено при $n > 8$. В случай на един отделен триъгълник неравенството е

$$\frac{(3n-1)(n-2)}{2} \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1 \Leftrightarrow n^2 - 4n + 2 \leq 0,$$

което е нарушено при $n > 4$.

Решение на задача 4.

Ще означаваме възлите с кръгчета, които считаме за точки. Да разгледаме конфигурация от 8 възела, образуващи правоъгълник 2×4 и да оцветим възлите в четири цвята, както е показано.

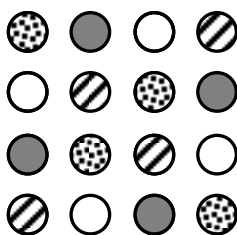


Възлите във всяка двойка едноцветни възли се намират на разстояние $\sqrt{5}$ един от друг и следователно в разглеждания правоъгълник 2×4 Мария може да постави най-много 4 червени камъчета. Тъй като мрежата 20×20 от 400 възела може да се раздели на 50 правоъгълника 2×4 , заключаваме, че Мария може да постави най-много $50 \cdot 4 = 200$ червени камъчета. Бройката 200 може да се реализира, ако оцветим мрежата 20×20 шахматно (бяло-черно) и поставим червените камъчета във възли от един и същ цвят, например черен.

Разсъжденията дотук наподобяват на решението на следната известна задача за шахматната дъска: Колко коня най-много могат да се разположат върху шахматна дъска 8×8 така, че никои два коня да не се „бият“? Отговорът е 32, а едно от възможните решения използва идеята от по-горе. Тази идея се основава на факта, че при всеки ход шахматният ход сменя цвета на полето.

И така, Мария може да използва най-много 200 възела, като възможна нейна стратегия би могла да бъде поставяне на червени камъчета само в черните полета на шахматно оцветената мрежа. Ясно е, че стратегията на Иван следва да бъде поставяне на сини камъчета във възли от избраната от Мария конфигурация от 200 възела (например черните полета). Тъй като Мария и Иван редуват ходовете си, то в най-добрия случай Иван може да попречи на Мария, ако поставя сини камъчета в половината от избраната конфигурация от 200 възела, т.е. в 100 възела.

Една възможна реализация на стратегията на Иван е следната. Да разделим мрежата 20×20 от 400 възела на 25 квадрата 4×4 и да оцветим възлите на всеки от квадратите в 4 цвята, както е показано:



Сега е достатъчно Иван да поставя синьо камъче във възела, който спрямо центъра на квадрата е симетричен на възела, в който Мария е поставила червено камъче. По този начин Мария ще може да използва само по един възел от всеки цвят, т.е. общо 4 възела. Заклучаваме, че $K = 4.25 = 100$.

Задачата може да се обобщи по следния естествен начин:

Точката (x, y) в равнината се нарича *възел*, ако x и y са естествени числа, ненадминаващи $4n$, където n е произволно естествено число. Първоначално всичките $16n^2$ възела са незаети. Мария и Иван последователно правят ходове, като поставят камъчета във възлите. Мария започва първа. Когато Мария е на ход, тя поставя ново червено камъче в незает възел така, че разстоянието между кои да е два възела, заети от червени камъчета, да не е равно на $\sqrt{5}$. Когато Иван е на ход, той поставя ново синьо камъче в незает възел. (Възел, зает от синьо камъче, може да е на всякакво разстояние от зает възел.) Играта завършва, когато някой от играчите не може да направи ход. Да се намери максималното число K , за което Мария може да постави поне K червени камъчета, както и да играе Иван.

В този случай отговорът на задачата е $K = 4n^2$.

Решение на задача 5.

Естествен е въпросът дали съществува редица с посоченото свойство. Отговорът в случая на крайна редица се дава от една известна задача (задача 1, 10-12 клас, XXVII Турнир на градовете, 2005 г.), съгласно условието на която се търсят онези $n \in \mathbb{N}$, за които съществуват различни естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ с посоченото свойство. При $n = 2$ отговорът е отрицателен. Да допуснем, че a_1 и a_2 са различни естествени числа, за които

числото $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}$ е цяло. Нека d е най-големият общ делител на a_1 и a_2 , т.е. $d = \gcd(a_1, a_2)$

(**g**reatest **c**ommon **d**ivisor, което в превод от английски е най-голям общ делител) и нека m и k са естествени числа, за които $a_1 = md$, $a_2 = kd$ и $\gcd(m, k) = 1$. Тогава

$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \frac{md}{kd} + \frac{kd}{md} = \frac{m}{k} + \frac{k}{m} = \frac{m^2 + k^2}{mk}$, което означава, че числото $\frac{(m+k)^2}{mk} = \frac{m^2 + k^2}{mk} + 2$ е цяло. Но от $\gcd(m, k) = 1$ следва, че $\gcd(m+k, m) = 1$ и $\gcd(m+k, k) = 1$ и значи $\frac{(m+k)^2}{mk}$ е цяло само ако $m = k = 1$, което е противоречие, защото a_1 и a_2 са различни естествени числа. При $n = 1$ и $n > 2$ отговорът на задачата е положителен. В първия случай числото $\frac{a_1}{a_1} = 1$ е цяло и твърдението е очевидно, а във втория случай е достатъчно да вземем $a_1 = 1$, $a_2 = n - 1$, ..., $a_n = (n - 1)^{n-1}$. Тогава

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} = \\ & = \frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}} + \frac{(n-1)^{n-1}}{1} = (n-1) \cdot \frac{1}{n-1} + (n-1)^{n-1} = 1 + (n-1)^{n-1}, \end{aligned}$$

което е цяло число.

В решението на задача 5. ще използваме техниката на p -адичните оценки.

Дефиниция. Ако p е просто число и $n \neq 0$ е цяло, под p -адичен ред или p -адична оценка на n се разбира най-високата степен v , за която p^v дели n . Тя се бележи с $v_p(n)$. По дефиниция $v_p(0) = \infty$.

p -адична оценка може да се дефинира и за рационални числа. Нека $\frac{n}{d}$ е рационално число и $\gcd(n, d) = 1$. Тогава $v_p\left(\frac{n}{d}\right) = v_p(n)$, ако $p \nmid d$, $v_p\left(\frac{n}{d}\right) = -v_p(d)$, ако $p \mid d$ и $v_p\left(\frac{n}{d}\right) = 0$, ако p не дели никое от тях.

Лесно се проверяват следните свойства:

1. Ако $\frac{n}{d}$ е рационално число, то $v_p\left(\frac{n}{d}\right) = v_p(n) - v_p(d)$.
2. $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.
3. $v_p(m \pm n) \geq \inf\{v_p(m), v_p(n)\}$, като $v_p(m \pm n) = \inf\{v_p(m), v_p(n)\}$ в случай, че $v_p(m) \neq v_p(n)$.
4. Необходимо условие числото a да е цяло е $v_p(a) \geq 0$ за всяко просто число p .

Нека N е от условието на задача 5. и нека $n \geq N$. Тогава числата $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1}$ и $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$ са естествени и след изваждането им заключаваме, че числото

$$A_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}$$

е цяло за всяко $n \geq N$. Ще докажем, че редицата от цели числа a_n , $n \geq N$, е p -адично ограничена, т.е. редицата $v_p(a_n)$ от p -адичните оценки е ограничена за всяко просто число p . Ако p е фиксирано просто число, нека $b_n = v_p(a_n)$. Възможни са няколко случая:

Случай 1. Нека $b_n \geq b_1$. Ще докажем, че $b_n \geq b_{n+1} \geq b_1$.

Да допуснем, че $b_{n+1} < b_1$. Тогава съгласно свойство 3. $v_p(a_{n+1} - a_n) = b_{n+1}$ и

$$v_p\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}\right) = v_p(a_{n+1} - a_n) - v_p(a_1) = b_{n+1} - b_1 < 0.$$

От друга страна $v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = v_p(a_n) - v_p(a_{n+1}) = b_n - b_{n+1} \geq 0$ и тогава съгласно свойство 3.

$v_p(A_n) < 0$, което е противоречие, защото A_n е цяло число.

Сега да допуснем, че $b_{n+1} > b_n$. Имаме

$$v_p\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}\right) = v_p(a_{n+1} - a_n) - v_p(a_1) = b_n - b_1 \geq 0, \quad v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = v_p(a_n) - v_p(a_{n+1}) = b_n - b_{n+1} < 0$$

и отново стигаме до противоречие с факта, че A_n е цяло число.

Случай 2. Нека $b_n \leq b_1$. Ще докажем, че $b_n \leq b_{n+1} \leq b_1$.

Да допуснем, че $b_{n+1} > b_1$. Тогава $v_p\left(\frac{a_n}{a_1}\right) = v_p(a_n) - v_p(a_1) = b_n - b_1$ и

$v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = v_p(a_n) - v_p(a_{n+1}) = b_n - b_{n+1} < b_n - b_1 \leq 0$. Заключаваме, че $v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < v_p\left(\frac{a_n}{a_1}\right) \leq 0$. От

друга страна $v_p\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right) = v_p(a_{n+1}) - v_p(a_1) = b_{n+1} - b_1 > 0$ и следователно

$$v_p(A_n) = v_p\left(\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_n}{a_1}\right) + \left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)\right) = v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < 0,$$

което е невъзможно защото A_n е цяло число.

Сега да допуснем, че $b_{n+1} < b_n$. Имаме

$$v_p\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}\right) = v_p(a_{n+1} - a_n) - v_p(a_1) = b_{n+1} - b_1 < 0, \quad v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = v_p(a_n) - v_p(a_{n+1}) = b_n - b_{n+1} > 0$$

и отново стигаме до противоречие с факта, че A_n е цяло число.

От направените разглеждания следва, че ако $b_N \geq b_1$, то редицата $b_N, b_{N+1}, b_{N+2}, \dots$ е нарастваща, а ако $b_N \leq b_1$, редицата е намаляваща и твърдението следва непосредствено.

Задачата може да се реши и без използване на техниката на p -адичните оценки. За целта, без да се спираме на подробностите, може да се използва, че

$$A_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1} = \frac{a_1 a_n + a_{n+1}(a_{n+1} - a_n)}{a_1 a_{n+1}}$$

Тогава $a_1 \mid a_{n+1}(a_{n+1} - a_n)$. Ако $\gcd(a_1, a_{n+1}) = d$, то $\frac{a_1}{d} \mid (a_{n+1} - a_n)$, откъдето $\gcd\left(\frac{a_1}{d}, a_n\right) = 1$ и следователно $\gcd(a_1, a_n) \mid d$. Заклучаваме, че $\gcd(a_1, a_n) \leq \gcd(a_1, a_{n+1})$ за всяко $n > N$. В същото време $\gcd(a_1, a_{n+1}) \leq a_1$ и значи съществува естествено число K така, че за всяко $n > K$ е изпълнено $\gcd(a_1, a_n) = d$. Нека $a_1 = dc$ и $a_n = db_n$ за $n > K$. Получаваме, че числото $\frac{cb_n + b_{n+1}(b_{n+1} - b_n)}{cb_{n+1}}$ е цяло, откъдето $b_{n+1} \mid cb_n$. Но $\gcd(c, b_{n+1}) = 1$ и следователно $b_{n+1} \mid b_n$. Оттук $b_{n+1} \leq b_n$. Но b_n е положително и заключаваме, че съществува естествено число M така, че $b_n = b_{n+1}$ за всяко $n > M$.

Решение на задача 6.

Преди да изложим решението ще изучим някои свойства, свързани с конфигурацията от условието на задачата.

Лема 1. Всеки изпъкнал четириъгълник $ABCD$ притежава единствена вътрешна точка, за която са изпълнени равенствата $\angle XAB = \angle XCD$ и $\angle XBC = \angle XDA$.

Доказателство: Възможни са няколко случая.

Случай 1. $ABCD$ е успоредник. Тогава точката X е пресечната точка на диагоналите му. Единствеността следва от факта, че вътрешните точки X , за които $\angle XAB = \angle XCD$, лежат на диагонала AC , а вътрешните точки X , за които $\angle XBC = \angle XDA$, лежат на диагонала BD .

Случай 2.1. $ABCD$ е трапец, за който $AB \parallel CD$. Нека $BC \cap AD = W$. Тогава пресечната точка на диагонала AC и описаната около $\triangle BDW$ окръжност $k(BDW)$ е желаната точка X . Това се доказва по следния начин:

$$\text{i) } \angle XAB = \angle XCD \text{ като кръстни ъгли; ii) } \angle XBC = \frac{\widehat{XDW}}{2} = \frac{\widehat{XD} + \widehat{DW}}{2} = \angle XDA.$$

Единствеността следва от факта, че вътрешните точки X , за които $\angle XAB = \angle XCD$, лежат на диагонала AC . Освен това, вътрешните точки X , за които $\angle XBC = \angle XDA$, лежат на окръжността $k(BDW)$, защото от условието $\angle XBC = \angle XDA$ следва, че $\angle XBC + \angle XDW = 180^\circ$ и следователно точките D, X, B и W лежат на една окръжност (това е точно окръжността $k(BDW)$). В същото време диагоналът AC пресича $k(BDW)$ в единствена вътрешна точка за $ABCD$.

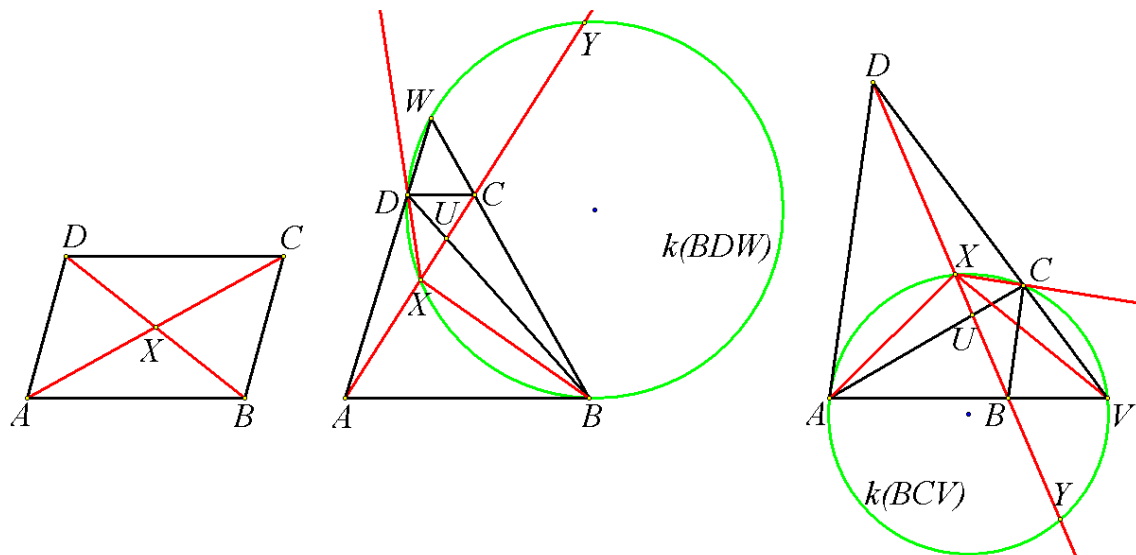
Да обърнем внимание, че втората пресечна точка Y на правата AC и $k(BDW)$ е такава, че $\angle YAB = 180^\circ - \angle YCD$ и $\angle YBC = 180^\circ - \angle YDA$.

Случай 2.2. $ABCD$ е трапец, за който $BC \parallel AD$. Нека $AB \cap CD = V$. Тогава пресечната точка на диагонала BD и описаната около $\triangle BCV$ окръжност $k(BCV)$ е желаната точка X . Това се доказва по следния начин:

$$\text{i) } \angle XAB = \frac{\widehat{XCV}}{2} = \frac{\widehat{XC} + \widehat{CV}}{2} = \angle XCD; \text{ ii) } \angle XBC = \angle XDA \text{ като кръстни ъгли.}$$

Единствеността се обосновава както по-горе.

Да обърнем внимание, че втората пресечна точка Y на правата BD и $k(BCV)$ е такава, че $\angle YAB = 180^\circ - \angle YCD$ и $\angle YBC = 180^\circ - \angle YDA$.

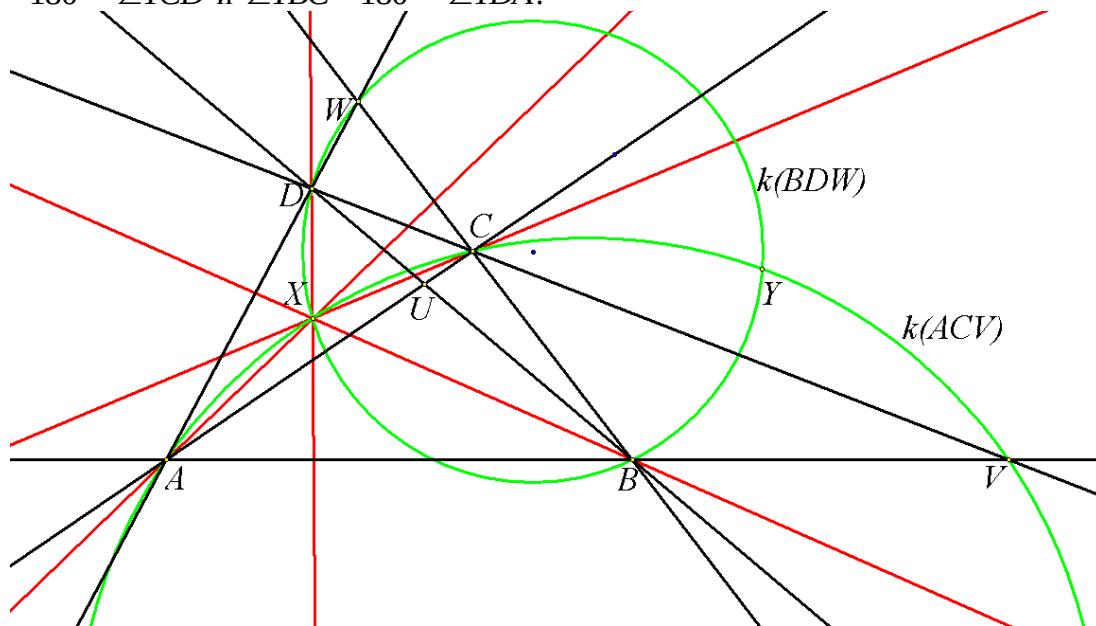


Случай 3. $ABCD$ няма успоредни страни. Нека $AB \cap CD = V$ и $BC \cap AD = W$. Тогава вътрешната за $ABCD$ пресечна точка на окръжностите $k(BCV)$ и $k(BDW)$, описани съответно около $\triangle BCV$ и $\triangle BDW$, е желаната точка X . Това се доказва по следния начин:

$$\text{i) } \angle XAB = \frac{\widehat{XCV}}{2} = \frac{\widehat{XC} + \widehat{CV}}{2} = \angle XCD; \text{ ii) } \angle XBC = \frac{\widehat{XDW}}{2} = \frac{\widehat{XD} + \widehat{DW}}{2} = \angle XDA.$$

Единствеността се обосновава както по-горе.

Да обърнем внимание, че втората пресечна точка Y на $k(BCV)$ и $k(BDW)$ е такава, че $\angle YAB = 180^\circ - \angle YCD$ и $\angle YBC = 180^\circ - \angle YDA$.



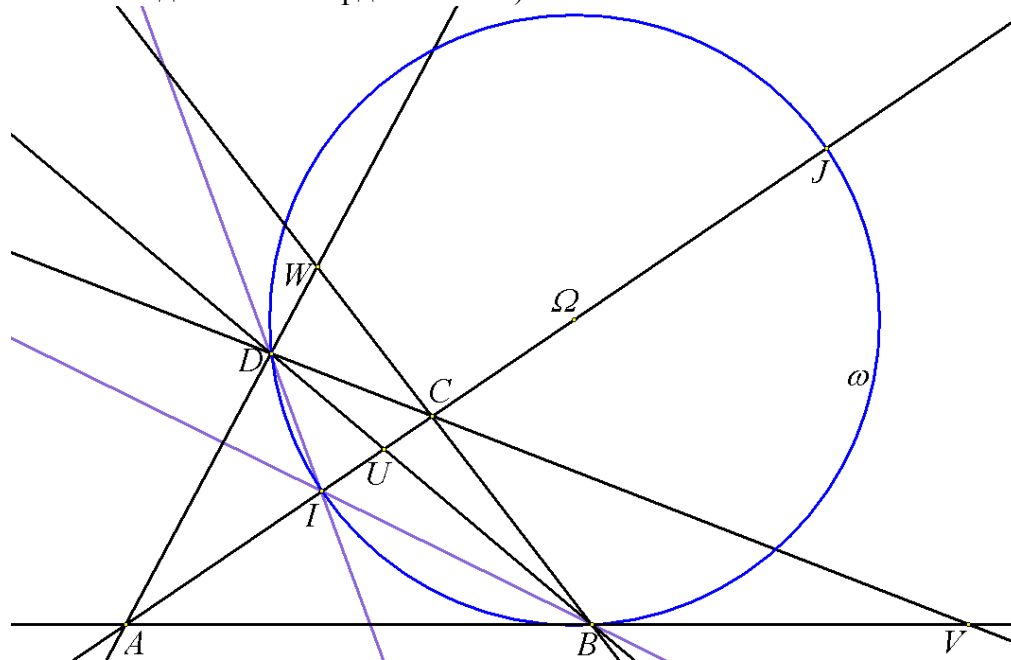
Лема 2. Ако страните на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ удовлетворяват равенството $AB \cdot CD = BC \cdot DA$, то:

а) ъглополовящите на ъглите ABC и CDA се пресичат в точка от диагонала AC , която означаваме с I ;

б) ъглополовящите на ъглите BAD и DCB се пресичат в точка от диагонала BD , която означаваме с I' .

Доказателство: а) Записваме даденото равенство във вида $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$. Нека I е такава точка от диагонала AC , че $\frac{IA}{IC} = \frac{BA}{BC}$. Тогава BI е ъглополовяща на $\angle ABC$. От друга страна е изпълнено и равенството $\frac{IA}{IC} = \frac{DA}{DC}$, което означава, че DI е ъглополовяща на $\angle CDA$.

Аналогично се доказва и твърдението в б).



Да обърнем внимание, че ако $BA \neq BC$, върху правата AC съществува и втора точка J със свойството $\frac{JA}{JC} = \frac{BA}{BC}$. Добре известно е, че окръжността ω с диаметър IJ е геометричното място на точките M , за които $\frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC}$. Окръжността ω се нарича *Аполониева окръжност* за отсечката AC при отношение $\frac{BA}{BC}$. Затова, ако е даден произволен $\triangle ABC$, всяка точка D от Аполониевата окръжност ω е четвъртият връх на четириъгълник $ABCD$, за който $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Така получаваме една идея за построяване на четириъгълник, отговарящ на условията на задачата. От друга страна лема 1 дава възможност да се определи точката X за този четириъгълник.

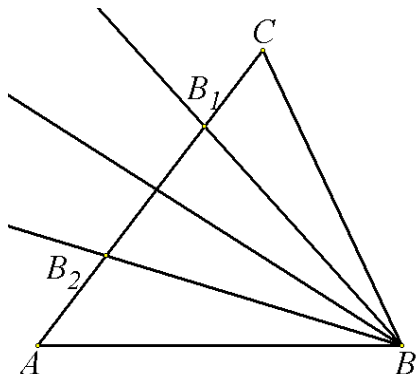
Лема 3. Нека ABC е произволен триъгълник, а B_1 и B_2 са такива точки от правата AC (B_2 е между A и B_1), че правите BB_1 и BB_2 са симетрични спрямо ъглополовящата на $\angle ABC$. Тогава е изпълнено равенството $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{CB_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{BC^2}{AB^2}$.

Доказателство: За лицата на триъгълниците BCB_1 и BAB_2 са изпълнени равенствата

$$\frac{S_{BCB_1}}{S_{BAB_2}} = \frac{CB_1}{AB_2} \quad \text{и} \quad \frac{S_{BCB_1}}{S_{BAB_2}} = \frac{BC \cdot BB_1 \cdot \sin \angle B_1BC}{AB \cdot BB_2 \cdot \sin \angle B_2BA} = \frac{BC \cdot BB_1}{AB \cdot BB_2}. \quad \text{Следователно} \quad \frac{CB_1}{AB_2} = \frac{BC \cdot BB_1}{AB \cdot BB_2}.$$

Аналогично от лицата на триъгълниците CBB_2 и ABB_1 имаме равенството $\frac{CB_2}{AB_1} = \frac{BC \cdot BB_2}{AB \cdot BB_1}$.

След почленно умножаване на получените равенства намираме $\frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_2}{AB_2} = \frac{BC^2}{AB^2}$.



Лема 4. Ако за изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е изпълнено равенството $AB \cdot CD = BC \cdot DA$, то:

а) симетричните образи на диагонала BD спрямо ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle CDA$ се пресичат в точка от диагонала AC , която означаваме с K ;

б) симетричните образи на диагонала AC спрямо ъглополовящите на $\angle BAD$ и $\angle DCB$ се пресичат в точка от диагонала BD , която означаваме с K' .

Доказателство: Означаваме с U пресечната точка на диагоналите AC и BD .

а) Нека симетричните образи на BD спрямо ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle CDA$ пресичат AC съответно в точките K_1 и K_2 . Прилагаме лема 3 за $\triangle ABC$ и получаваме

равенството $\frac{CU}{AU} \cdot \frac{CK_1}{AK_1} = \frac{BC^2}{AB^2}$. След прилагане на лема 3 за $\triangle CDA$ получаваме

$\frac{AU}{CU} \cdot \frac{AK_2}{CK_2} = \frac{DA^2}{CD^2}$. От почленното умножаване на последните две равенства следва

$\frac{CK_1 \cdot AK_2}{AK_1 \cdot CK_2} = \left(\frac{BC \cdot DA}{AB \cdot CD} \right)^2 = 1$. Следователно $\frac{AK_2}{CK_2} = \frac{AK_1}{CK_1}$. Тъй като точките K_1 и K_2

принадлежат на отсечката AC , последното равенство означава, че точките K_1 и K_2 съвпадат, т.е. $K_1 = K_2 = K$.

Аналогично се доказва и твърдението б) за точката K' .

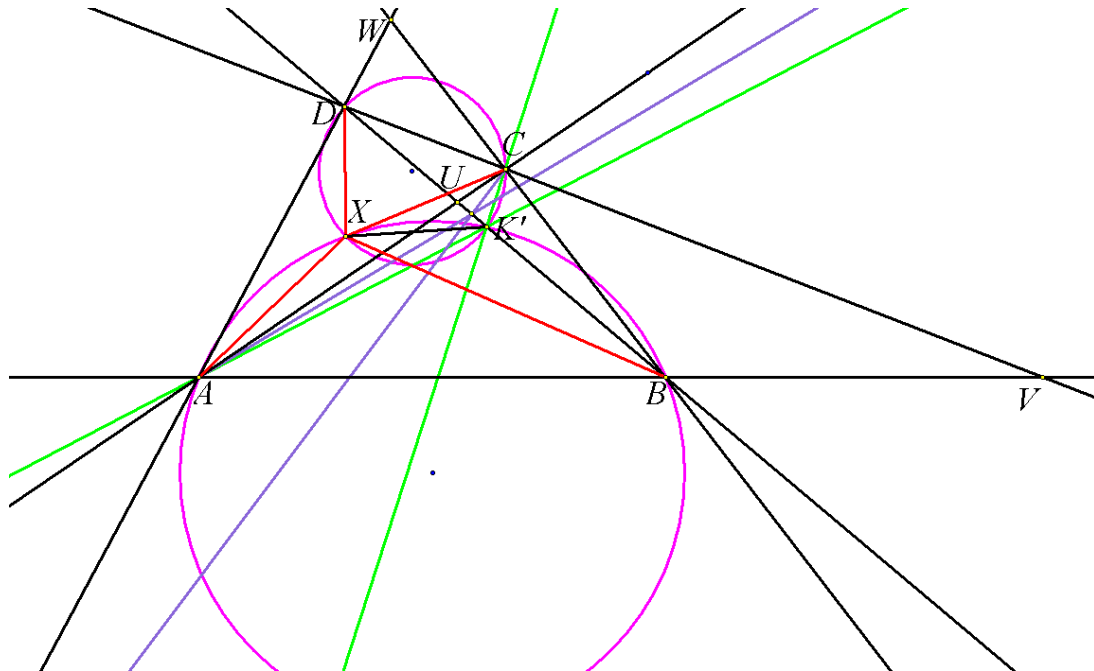
От лема 4 следва, че точката I е център на вписаната в $\triangle BDK$ окръжност. Затова AC е ъглополовяща на $\angle BKD$. Следователно $180^\circ = \angle AKD + \angle DKC = \angle AKD + \angle BKC$. Така получаваме следното

Следствие. Изпълнени са равенствата $\angle AKD + \angle BKC = 180^\circ$ и $\angle BK'A + \angle CK'D = 180^\circ$.

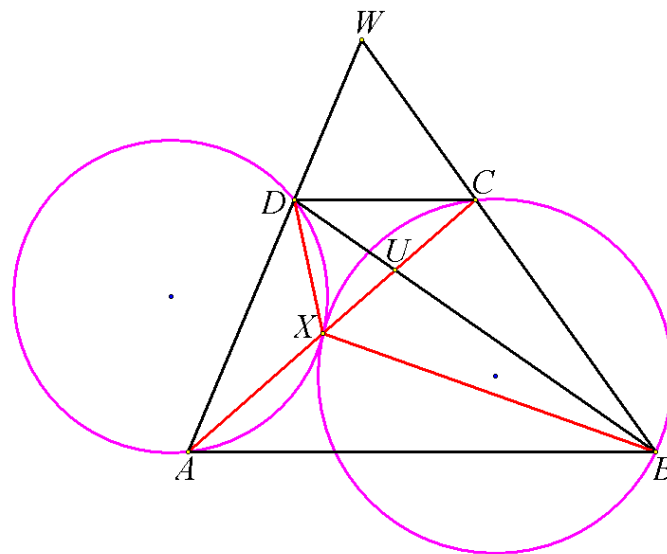
Второто равенство се получава по следния начин:

$$\angle XBC = \frac{\widehat{XC}}{2} = \angle XKC = 180^\circ - \angle AKX = \angle XDA.$$

Твърдението б) за другата двойка окръжности се доказва по същия начин.



Трябва да се отбележи, че когато $AB \parallel CD$, точката X съвпада с K . В този случай окръжностите $k(BCK)$ и $k(DAK)$ се допират в точката X .



Ето и решението на задача 6. Ако $ABCD$ е успоредник, равенството $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ е изпълнено само когато $ABCD$ е ромб. Тъй като точката X е пресечната

точка на диагоналите му, то $\angle BXA + \angle DXC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Нека сега $ABCD$ е такъв, че поне две от страните му не са успоредни. Тъй като, според лема 5, точката X принадлежи на окръжностите $k(BCK)$ и $k(DAK)$, то $\angle DXA + \angle BXC = \angle AKD + \angle BKC$. От следствието получаваме $\angle DXA + \angle BXC = 180^\circ$. Но $(\angle BXA + \angle DXC) + (\angle DXA + \angle BXC) = 360^\circ$. Следователно $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$. Ако разгледаме точката X като обща за окръжностите $k(BCK')$ и $k(DAK')$, от лема 5 и следствието се получава желаното равенство по следния начин $\angle BXA + \angle DXC = \angle BK'A + \angle CK'D = 180^\circ$.

Ще се въздържим от коментар относно представянето на българските ученици по отделните задачи. Категоричен извод обаче може да се направи. А той е, че заключителните подготовки на българските отбори са незадоволителни. Имаме добри учители, които готвят добри ученици. Но на тези добри ученици липсват надграждащи знания, за да могат да се справят с трудните задачи. Изложените по-горе решения доказват, че такива надграждащи знания са абсолютно необходими. За съжаление тези, които са си присвоили властта да ги преподават, не притежават необходимия капацитет и подход. Ето равносметката за последните 35 години, от която много ясно се вижда „кой кой е”.

година	зад.1	зад.2	зад.3	зад.4	зад.5	зад.6	точки	място	зл.	ср.	бр.	Научен ръководител
2018	42	30	2	35	29	8	146	21	1	3	1	Петър Бойваленков
2017	40	31	0	42	1	2	116	18	0	4	2	Петър Бойваленков
2016	42	13	3	42	18	14	132	18	0	3	3	Петър Бойваленков
2015	36	13	9	32	5	5	100	29	0	2	1	Петър Бойваленков
2014	39	25	2	42	12	0	120	37	0	3	1	Петър Бойваленков
ОБЩО	199	112	16	193	65	29	614		1	15	8	
2013	31	24	5	28	13	0	101	38	0	1	2	Николай Николов
2012	42	22	7	38	4	3	116	19	1	2	2	Николай Николов
2011	42	1	15	37	22	4	121	20	0	2	3	Николай Николов
2010	41	22	1	42	5	7	118	21	1	2	3	Николай Николов
2009	42	38	9	32	36	0	157	19	1	3	2	Николай Николов
ОБЩО	596	107	37	177	80	14	613		3	10	12	
2008	42	28	14	35	19	16	154	14	2	1	3	Емил Колев
2007	34	35	4	42	32	2	149	9	2	3	1	Емил Колев
2006	42	14	4	42	14	0	116	21	0	4	1	Емил Колев
2005	38	32	15	36	35	17	173	11	2	3	1	Емил Колев
2004	39	36	22	42	36	19	194	5	3	3	0	Емил Колев
ОБЩО	195	145	59	197	136	54	786		9	14	6	

2003	37	34	41	42	37	36	227	1	6	0	0	Сава Гроздев
2002	32	40	11	34	36	14	167	4	3	2	1	Сава Гроздев
2001	41	19	12	42	35	36	185	4	3	3	0	Сава Гроздев
2000	42	35	5	25	30	32	169	4	2	3	1	Сава Гроздев
1999	41	23	10	42	25	29	170	5	3	3	0	Сава Гроздев
ОБЩО	193	151	79	185	163	147	918		17	11	2	
1998	36	36	15	35	37	36	195	2	3	3	0	Олег Мушкаргов
1997	29	42	28	40	42	10	191	7	2	3	1	Олег Мушкаргов
1996	21	37	22	31	13	12	136	11	1	4	1	Олег Мушкаргов
1995	41	35	41	41	35	14	207	6	1	4	1	Олег Мушкаргов
1994	36	42	42	34	41	28	223	4	3	2	1	Олег Мушкаргов
ОБЩО	163	192	148	181	168	100	952		10	16	4	
1993	24	29	23	32	42	28	178	3	2	4	0	Любомир Давидов
1992	35	14	14	35	9	20	127	15	1	1	3	Любомир Давидов
1991	42	42	22	30	41	15	192	7	0	3	3	Любомир Давидов
1990	36	33	23	17	34	9	152	9	1	4	1	Любомир Давидов
1989	18	41	18	42	42	34	195	7	1	3	2	Любомир Давидов
ОБЩО	155	159	100	156	168	106	844		5	15	9	
1988	42	9	16	21	42	14	144	8	0	4	2	Иван Тонов
1987	38	42	28	36	41	25	210	7	1	3	2	Иван Тонов
1986	30	35	3	20	35	38	161	7	1	3	2	Иван Тонов
1985	42	35	10	22	33	23	165	4	2	3	0	Иван Тонов
1984	42	34	20	41	36	30	203	2	2	3	1	Иван Тонов
ОБЩО	194	155	77	140	187	130	883		6	16	7	

Следващата международна олимпиада, която е юбилейна (60-а поред), ще се проведе във Великобритания през м. юли 2019 г. Домакин ще бъде Университетът в гр. Бат.