

Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

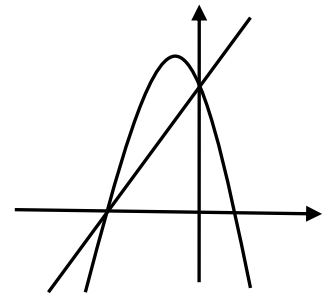
2 юни 2018 г.

ТЕМА за 11 – 12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Спрямо правоъгълна координатна система са показани графиките на функциите $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = -ax + d$, където a, b, c и d са реални числа. Намерете положителния корен на квадратното уравнение $f(x) = 0$.



- А) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{1}{2}$ С) 1 Д) $\frac{3}{2}$ Е) 2

2. Ако реалните числа x, y и z са решения на системата

$$\begin{cases} x + y + 2z = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{5}xy - z^2 + 2z = \frac{5}{4} \end{cases},$$

да се намери стойността на израза $x - y + z$.

- А) 2 В) 3 С) 4 Д) 5 Е) 6

3. Даден е триъгълник, дължините на височините в който са не по-малки от 3 cm. Намерете възможно най-малкото лице на триъгълника в квадратни сантиметри.

- А) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ В) $\sqrt{3}$ С) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ Д) $2\sqrt{3}$ Е) $3\sqrt{3}$

4. Да се определи броят на тройките последователни месеци от юни 2014 г. до септември 2018 г., за които средното аритметично на броя на дните във всяка тройка е цяло число.

- А) 4 В) 5 С) 6 Д) 7 Е) 8

5. Росен хвърля едновременно три еднакви стандартни зара и записва най-голямото от числата, които се падат. Той извършва тази операция три пъти. Да се намери вероятността сумата на записаните числа да е 18.

- А) $\frac{1}{6^9}$ В) $\frac{5^6}{6^9}$ С) $\left(\frac{91}{216}\right)^3$ Д) $\frac{1}{2^3}$ Е) $\frac{6^9 - 5^9}{6^9}$

6. Антон записал в тетрадката си стойностите на $3!, 4!, 5!, 6!, 7!, 8!, 9!$ и $10!$. След като задраскал една от тях, се оказало, че произведението на останалите е квадрат на естествено число n . Да се определи четвъртата цифра отзад напред на числото n .

7. От първите $2k$ ($k \geq 1$) естествени числа са избрани k , сумата на всеки две от които е различна от $2k + 1$. Нека S е сумата на избраните числа, а T е сумата на квадратите им.

а) Да се намери T .

б) Да се докаже, че при $k = 1009$ числата могат да се изберат така, че $S = 1009^2$.

в) Да се пресметне T при $k = 1009$ и $S = 1009^2$.