



МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА' 2019

Д-р М. Плюс

Поредната 60. международна олимпиада по математика се проведе в гр. Бат, Обединено кралство от 11 до 22 юли 2019 г. В нея взеха участие 621 ученици, с 27 повече от миналата година. Между участниците имаше 65 девойки. Представиха се общо 112 държави, с 5 повече от миналата година, което е рекорд по отношение на броя участващи държави (придшиният рекорд е 111, поставен през 2017 г. в Рио де Жанейро, Бразилия). По регламент, приблизително половината състезатели получиха медали в отношение 1:2:3 (също приблизително) на златните, сребърните и бронзовите. Журито на олимпиадата в Обединеното кралство разпреди общо 302 медала, от които 52 златни с долна граница 31 точки вкл., 94 сребърни с граници от 24 до 30 точки вкл. и 156 бронзови с граници от 17 до 23 точки вкл. Бяха присъдени и 144 почетни отличия за учениците извън медалистите с поне една пълно решена задача. По време на финалното си заседание журито разгледа случилото с двама състезатели (от различни държави), които въпреки регламента и настоятелното напомняне от страна на квесторите, бяха продължили да пишат по решенията след изтичане на определеното време. Журито обсъди различни варианти за наказание и гласува предложението на Комитета по етика да се постави нула на най-високо оценената задача от съответната писмена работа. Предложението на Комитета по етика включваше опция в случай на повече от една задача с най-висока оценка, съгласно която нулата следваше да се постави на задачата с по-преден номер в темата. Имената на двамата нарушители и техните държави бяха запазени в тайна.

Българският отбор заслужи 5 сребърни и 1 бронзов медал. Представянето е в рамките на очакванията и затвърждава тенденцията за последните повече от 10 години България да е извън групата на водещите държави. А това са “четирите големи”: Китай, САЩ, Русия и Южна Корея. По данни от официалния сайт на международната олимпиада, 6 пъти за последните 20 години от 2000 г. насам точно тези държави са заемали първите четири места. Останалите държави са се появявали епизодично в първата четворка. На челно място между тях е България (шесто място, вж. таблицата по-долу), но както беше споменато, това се е случвало преди повече от 10 години. Още страдаме от пораженията, нанесени от бившия ДС активист Кадмий и доказан доносник ПеКе, както и от неговото протеже – джуджето ПеБо.

Място	Държава	Класирания на първо място	Класирания на второ място	Класирания на трето място	Класирания на четвърто място	Брой призови класирания
1	Китай	13	5	2		20
2	САЩ	4	5	7	1	17
3	Русия	1	7	3	4	15
4	Ю. Корея	2	2	4	5	13
5	Виетнам			2	2	4
6	България	1			2	3
7	Сингапур			1	1	2
8	С. Корея				2	2
9	Япония		1			1
10	Тайван			1		1
11	Иран				1	1
12	Германия				1	1
13	Украйна				1	1

Ето имената на българските представители: Евгени Кайряков (11 клас, СМГ, учител Илиана Цветкова), Иво Петров (11 клас, СМГ, учител Илиана Цветкова), Борислав Кирилов (9 клас, ПЧМГ, учител Ирина Шаркова), Къонг До (10 клас, СМГ, учител Ваня Данова), Кристиан Минчев (11 клас, ППМГ Бургас, учител Гергана Николова) и Кристиан Василев (12 клас, ПЧМГ, учител Таня Стоева). В отборното класиране България е на 19. място със 152 точки. Победители в тазгодишната олимпиада са шестима ученици, постигнали максималните 42 точки – Baiting Xie и Zhizhen Yuan от Китай, Colin Shanmo Tang и Daniel Zhu от САЩ, Jan Formal от Полша и Youngjun Cho от Южна Корея. Силно впечатление правят 41-те точки на Йелена Иванчич от Сърбия, които са с 1 точка по-малко от максималните заради пропуск в решението на не особено трудната задача 2. Любопитно е, че в същото време 49 ученици са с общо 0 точки върху темата (около 8% от всички участници), а 32-ама са с 1 точка. По-долу са резултатите на нашите състезатели, както и класирането по държави.

60. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2019 Г.

КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ

резултати по задачи	I	II	III	IV	V	VI	точки	място	медал
Евгени Кайряков	7	6	1	7	7	0	28	65-100	сребърен
Иво Петров	7	6	0	7	7	0	27	101-121	сребърен
Борислав Кирилов	7	6	0	7	7	0	27	101-121	сребърен
Къонг До	7	6	0	7	7	0	27	101-121	сребърен
Кристиан Минчев	7	6	0	6	7	0	26	122-131	сребърен

Кристиян Василев	7	7	1	0	2	0	17	275-302	бронзов
отборен резултат	42	37	2	34	37	0	152	19	

60. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2019 Г.

КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ ПО ДЪРЖАВИ

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой участници	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
1	САЩ	6	42	40	26	42	42	35	227	6	0	0
1	Китай	6	40	41	27	41	42	36	227	6	0	0
3	Южна Корея	6	42	39	31	42	42	30	226	6	0	0
4	Северна Корея	6	41	41	17	42	42	4	187	3	3	0
5	Тайланд	6	42	35	5	42	40	21	185	3	3	0
6	Русия	6	39	40	17	35	42	6	179	2	4	0
7	Виетнам	6	39	31	10	40	42	15	177	2	4	0
8	Сингапур	6	42	30	13	40	42	7	174	2	4	0
9	Сърбия	6	42	26	19	31	37	16	171	3	1	2
10	Полша	6	42	28	9	40	42	7	168	1	3	2
11	Унгария	6	41	19	14	42	42	7	165	1	3	2
11	Украйна	6	42	33	5	42	40	3	165	1	4	1
13	Япония	6	42	32	8	31	42	7	162	2	2	2
14	Индонезия	6	40	38	1	40	35	6	160	1	4	1
15	Индия	6	42	32	7	41	33	1	156	1	4	0
15	Израел	6	42	19	18	34	42	1	156	1	3	2
17	Румъния	6	42	30	7	42	32	2	155	1	2	3
18	Австралия	6	42	28	13	37	33	1	154	2	1	3
19	България	6	42	37	2	34	37	0	152	0	5	1
20	Великобритания	6	39	31	2	33	37	7	149	1	2	3
21	Тайван	6	40	21	7	39	34	7	148	1	2	3
22	Казахстан	6	41	39	1	42	22	1	146	0	2	4
23	Иран	6	35	38	3	40	27	2	145	1	2	3
24	Канада	6	42	16	3	39	42	2	144	1	1	4

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой участници	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
25	Франция	6	41	9	15	39	38	0	142	0	2	4
26	Монголия	6	41	27	6	35	32	0	141	1	1	3
27	Италия	6	42	36	0	30	31	1	140	0	2	4
28	Перу	6	41	34	0	34	28	0	137	0	3	1
29	Бразилия	6	42	21	1	41	30	0	135	0	2	4
29	Турция	6	38	23	4	36	32	2	135	1	1	3
31	Филипини	6	42	16	0	42	29	0	129	0	1	5
32	Германия	6	36	9	3	29	42	7	126	1	0	3
33	Саудитска Арабия	6	41	19	0	29	35	0	124	0	1	4
34	Норвегия	6	35	20	0	37	30	0	122	0	1	3
35	Беларус	6	42	23	1	30	23	0	119	0	2	2
36	Естония	6	40	8	0	34	36	0	118	0	1	4
37	Хонг Конг	6	41	3	5	37	31	0	117	0	1	3
37	Холандия	6	38	9	3	29	37	1	117	0	1	4
39	Словакия	6	36	4	8	26	40	0	114	0	1	3
40	Гърция	6	42	15	0	34	19	2	112	0	1	2
41	Мексико	6	41	27	1	19	23	0	111	0	1	3
42	Хърватска	6	36	24	1	22	27	0	110	0	0	3
42	Испания	6	36	13	0	29	32	0	110	0	0	5
44	Словения	6	41	5	14	21	28	0	109	0	2	1
45	Грузия	6	42	10	0	36	20	0	108	0	1	4
46	Чехия	6	35	2	1	26	42	0	106	0	0	4
46	Южна Африка	6	41	4	0	35	26	0	106	0	0	4
48	Дания	6	35	15	5	20	30	0	105	0	1	2
49	Армения	6	41	15	1	21	26	0	104	0	2	1
50	Молдова	6	41	17	0	23	10	9	100	0	1	1
51	Азербайджан	6	36	29	0	29	4	0	98	0	0	3
52	Литва	6	42	4	0	35	15	0	96	0	0	3
53	Аржентина	6	34	17	1	24	19	0	95	0	0	3
54	Португалия	6	32	10	0	28	23	0	93	0	1	1

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой участ- ници	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
55	Макао	6	33	3	0	35	20	0	92	0	0	3
55	Швеция	6	33	10	7	22	20	0	92	1	0	1
55	Сирия	6	36	27	0	17	12	0	92	0	1	1
58	Нова Зеландия	6	28	0	0	36	25	0	89	0	0	2
58	Швейцария	6	29	6	0	22	32	0	89	0	0	3
60	Австрия	6	32	17	2	15	18	0	84	0	0	4
60	Босна и Херцеговина	6	41	8	0	22	13	0	84	0	0	0
62	Таджикистан	6	40	12	1	17	8	4	82	0	1	1
63	Узбекистан	5	34	15	0	24	8	0	81	0	0	1
63	Мароко	6	40	12	0	18	10	0	80	0	0	1
65	Финландия	6	30	7	1	20	20	0	78	0	1	1
66	Колумбия	6	30	4	0	20	23	0	77	0	0	2
67	Бангладеш	6	32	15	0	19	10	0	76	0	0	1
68	Белгия	6	31	10	0	23	11	0	75	0	1	1
69	Шри Ланка	6	39	6	0	15	13	0	73	0	0	1
70	Малайзия	6	21	5	0	23	22	0	71	0	0	2
71	Ирландия	6	21	10	7	10	13	0	61	0	1	0
72	Латвия	6	29	1	0	8	18	0	56	0	0	0
73	Туркменистан	6	35	4	0	8	6	0	53	0	0	0
74	Тунис	6	27	6	0	4	11	0	48	0	0	0
75	Кипър	5	31	3	0	9	4	0	47	0	0	0
75	Северна Македония	6	19	2	0	19	2	1	47	0	0	1
77	Алжир	5	28	5	0	7	1	0	46	0	0	0
78	Ел Салвадор	4	9	12	0	13	5	1	45	0	0	0
79	Косово	6	24	6	0	9	4	0	43	0	0	0
80	Албания	6	22	3	0	3	9	0	37	0	0	0
80	Исландия	6	16	0	0	6	15	0	37	0	0	0
80	Панама	4	20	1	0	6	10	0	37	0	0	1
83	Коста Рика	6	22	0	0	6	6	0	34	0	0	0

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой участ- ници	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
83	Пакистан	5	18	2	0	7	7	0	34	0	0	1
83	Тринидад и Тобаго	6	17	4	1	1	11	0	34	0	0	0
86	Черна Гора	5	17	7	0	1	8	0	33	0	0	0
87	Еквадор	5	18	9	0	1	4	0	32	0	0	0
88	Уругвай	5	16	2	0	9	2	0	29	0	0	0
89	Куба	2	10	3	0	8	2	0	23	0	0	0
90	Чили	4	10	2	0	0	8	0	20	0	0	0
91	Киргизстан	6	11	2	0	2	4	0	19	0	0	0
92	Парагвай	6	15	1	0	1	1	0	18	0	0	0
93	Ирак	6	10	0	0	1	6	0	17	0	0	0
93	Непал	6	12	1	0	0	4	0	17	0	0	0
93	Никарагуа	2	14	1	0	0	2	0	17	0	0	0
96	Египет	4	3	1	0	1	7	0	12	0	0	0
97	Гана	4	9	0	0	0	2	0	11	0	0	0
97	Мианмар	6	6	2	0	0	3	0	11	0	0	0
99	Камбоджа	6	2	8	0	0	0	0	10	0	0	0
100	Боливия	6	7	0	0	0	2	0	9	0	0	0
100	Люксембург	6	2	1	1	0	5	0	9	0	0	0
102	Доминиканска република	5	3	0	0	0	2	0	5	0	0	0
102	Уганда	6	4	1	0	0	0	0	5	0	0	0
104	Гватемала	3	1	1	0	0	2	0	4	0	0	0
105	Хондурас	3	2	0	0	0	1	0	3	0	0	0
105	Пуерто Рико	1	1	0	0	0	2	0	3	0	0	0
105	Танзания	6	2	0	0	1	0	0	3	0	0	0
105	Венецуела	2	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0
109	Ботсвана	2	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0
110	Ангола	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
110	Кения	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
110	Обединени арабски емирства	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ето задачите от 60-ата международна олимпиада по математика:

Вторник, 16 юли 2019 г.

Задача 1. Нека $\mathbb{Z}$ е множеството на целите числа. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ така, че за всички цели числа a и b е изпълнено равенството

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

(Предложена от Liam Baker, Южна Африка)

Задача 2. В триъгълника ABC точката A_1 е от страната BC , а точката B_1 е от страната AC . Нека точките P и Q са съответно от отсечките AA_1 and BB_1 така, че правите PQ и AB са успоредни. Нека P_1 е точка върху правата PB_1 така, че B_1 е между P и P_1 , а $\angle PP_1C = \angle BAC$. Аналогично, нека Q_1 е точка върху правата QA_1 така, че A_1 е между Q и Q_1 , а $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Да се докаже, че точките P, Q, P_1 и Q_1 лежат на една окръжност.

(Предложена от Anton Trygub, Украйна)

Задача 3. Една социална мрежа има 2019 потребители, някои двойки от които са приятели. Ако потребител A е приятел с потребител B , то и B е приятел с A . Възможни са последователни (неедновременни) събития от следния вид:

Трима потребители A, B и C , за които A е приятел с B и C , но B и C не са приятели, могат да сменят приятелството си така, че B и C да станат приятели, а A да не е вече приятел с B , нито с C . Всички останали приятелства остават непроменени.

Първоначално всеки от 1010 потребители е приятел с 1009 потребители, а всеки от 1009 потребители е приятел с 1010 потребители. Да се докаже, че съществува последователност от събития, след реализацията на които всеки потребител е приятел с не повече от един потребител.

(Предложена от Adrian Beker, Хърватска)

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Всяка задача се оценява със 7 точки

Сряда, 17 юли 2019 г.

Задача 4. Намерете всички двойки естествени числа (k, n) , за които

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

(Предложена от Gabriel Chicas Reyes, Ел Салвадор)

Задача 5. Банката в град Бат издала монети с буквата H от едната страна и буквата T от другата. Хари разполага с n монети, подредени отляво надясно в редица. Той изпълнява нееднократно следната операция: ако точно $k > 0$ монети са с буквата H от видимата страна, Хари обръща k -ата монета отляво надясно; в противен случай всички монети са с буквата T от видимата страна и той спира. Например, ако $n = 3$, последователните подреждания, стартиращи с конфигурацията THT , са:

$$THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$$

и Хари спира след третото изпълнение на операцията.

(а) Да се докаже, че за всяка начална конфигурация Хари спира след краен брой изпълнения на операцията.

(б) За всяка начална конфигурация C нека $L(C)$ е броят изпълнения на операцията, след които Хари спира. Например, $L(THT) = 3$ и $L(TTT) = 0$. Да се определи средната стойност на $L(C)$ спрямо всичките 2^n на брой възможни начални конфигурации C .

(Предложена от David Altizio, САЩ)

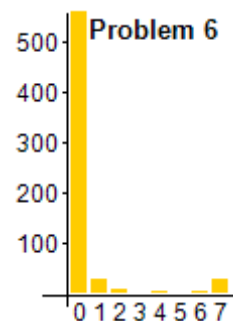
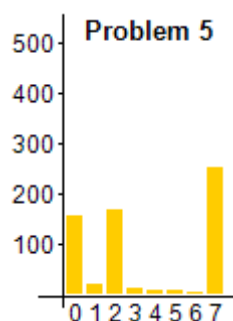
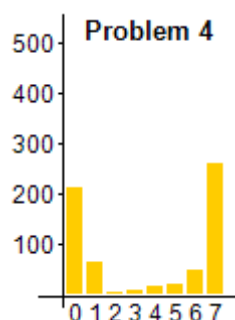
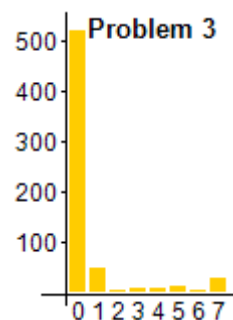
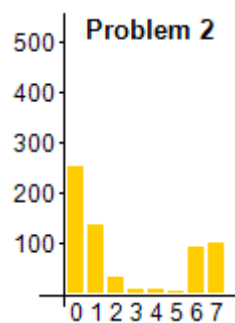
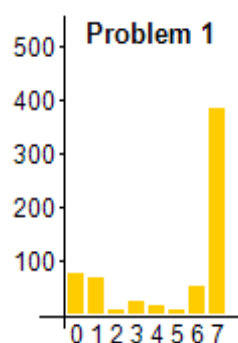
Задача 6. Даден е остроъгълен триъгълник ABC , за който $AB \neq AC$. Вписаната в триъгълника окръжност ω с център I се допира до страните BC , CA и AB съответно в точките D , E и F . Правата през D , която е перпендикулярна на EF , пресича ω в точка R , а правата AR пресича ω за втори път в точката P . Описаните окръжности около триъгълниците PCE и PBF се пресичат за втори път в точката Q . Да се докаже, че правите DI и PQ се пресичат в точка от правата през A , която е перпендикулярна на AI .

(Предложена от Anant Mudgal, Индия)

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Всяка задача се оценява със 7 точки

Предлагаме Ви официалната статистика за представянето на участниците в олимпиадата по всяка от шестте задачи от темата. Върху абсцисната ос са нанесени възможните резултати от 0 до 7 точки включително, а върху ординатната ос – броят ученици със съответния точков резултат. Данните от графиките са уточнени в таблицата.



	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
среден брой точки	5,179	2,399	0,572	3,736	3,567	0,403
точки	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
0	73	251	520	211	156	558
1	65	135	46	63	20	25
2	6	30	3	4	168	7
3	24	6	6	7	12	0
4	14	6	5	13	5	1
5	5	3	9	19	7	0
6	52	92	4	47	3	3
7	382	98	28	257	250	27
	621	621	621	621	621	621

Решение на задача 1.

Една функция f се нарича *адитивна*, ако $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за всички x и y от дефиниционната област на f . Тази зависимост е известна като *функционално уравнение на Коши* (Огюстен Луи Коши (1789 – 1857) е френски математик) относно f . С помощта на несложни аргументи и елементарни алгебрични преобразувания може да се докаже, че множеството на адитивните функции $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, където $\mathbb{Q}$ е множеството на рационалните числа, съвпада с множеството на линейните функции, т.е. $f(x) = cx$ за всяко $x \in \mathbb{Q}$, където c е рационално число. С други думи, вярна е следната

Теорема. Ако $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ е адитивна функция., то тя е линейна.

Доказателство: Ще докажем, че всяко решение на уравнението на Коши $f(x+y) = f(x) + f(y)$ е от вида $f(x) = cx$. Ще разгледаме няколко случая за стойностите на $f(q)$: $q = 0$, $q > 0$ и $q < 0$.

Случай 1: ($q = 0$)

Като поставим $y = 0$ в уравнението на Коши, получаваме $f(x) = f(x) + f(0)$ за всяко $x \in \mathbb{Q}$ и следователно $f(0) = 0$.

Случай 2: ($q > 0$)

По индукция лесно следва, че за всяко $x \in \mathbb{Q}$ е изпълнено $\alpha f(x) = f(\alpha x)$, където $\alpha \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа). Като заместим x с $\frac{x}{\alpha}$, получаваме $\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = f\left(\alpha \cdot \frac{x}{\alpha}\right) = f(x)$. Ако $\beta \in \mathbb{N}$, имаме $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\beta}{\alpha} f(x)$, т.е. $\beta f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\beta}{\alpha} f(x)$ и следователно $f\left(\beta \cdot \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\beta}{\alpha} f(x)$. Заключаваме, че $f(qx) = qf(x)$ за всяко $x \in \mathbb{Q}$, където $q > 0$, $q \in \mathbb{Q}$. Ако $x = 1$, то $f(q) = qf(1) = cq$, където $c = f(1)$ е рационално число.

Случай 3: ($q < 0$)

Като поставим $y = -x$ във функционалното уравнение и използваме, че $f(0) = 0$, получаваме $f(-x) = -f(x)$ за всяко $x \in \mathbb{Q}$, т.е. $f(x) = -f(-x)$, $x \in \mathbb{Q}$. Нека сега $q < 0$, $q \in \mathbb{Q}$. Тогава $-q > 0$ и с помощта на Случай 2. заключаваме, че $f(q) = -f(-q) = -(c(-q)) = cq$, $q < 0$.

Обединявайки всички случаи, стигаме до исканото твърдение, т.е. всички решения на функционалното уравнение на Коши над множеството на рационалните числа са: $f(q) = cq$, $q \in \mathbb{Q}$, $c = f(1) \in \mathbb{Q}$.

Да обърнем внимание, че както и по-горе, ако функционалното уравнение на Коши се разглежда над множеството на целите числа $\mathbb{Z}$, то всички решения са линейните функции $f(q) = cq$, $q \in \mathbb{Z}$, като сега $c = f(1) \in \mathbb{Z}$. Над множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ отново $f(x) = cx$ с c произволна реална константа. В този случай обаче има и други решения, които са особени и изключително сложни. Съществуват условия, някои от които са доста слаби, при които могат да се опишат особените решения. Например, една адитивна функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е линейна, ако:

- f е непрекъсната (този факт е доказан от Коши през 1821 г.). Условието е отслабено през 1875 г. от Дарбу (Жан Гастон Дарбу (1842 – 1917) е френски математик), който доказва, че е достатъчно функцията да е непрекъсната само в една точка;

- f е монотонна в произволен интервал;
- f е ограничена в произволен интервал;
- f е интегрируема по Лебег.

Ако върху f не са наложени ограничения от рода на изброените, то освен линейните съществуват безброй много други функции, които удовлетворяват уравнението на Коши. Този факт е доказан през 1905 г. от Хамел (Гьорг Хамел (1877 – 1954) е немски математик) с помощта на т. нар. *базис на Хамел*. Понякога решенията се наричат *функции на Хамел*. Петият проблем на Хилберт (Давид Хилберт (1862 – 1943) е немски математик, който през 1900 г. по време на Международния математически конгрес в Париж формулира 23 проблема като предизвикателства пред математиците на XX век) е обобщение на уравнението на Коши. Функции, за които съществува реално число c така, че $f(cx) \neq cx$, се наричат функции на Коши-Хамел и се използват при един тип инварианти, които пък от своя страна са свързани с разширението на третия проблем на Хилберт от тримерното пространство в пространства с по-висока размерност.

Да се върнем към решението на Задача 1. Нека функцията f е решение на функционалното уравнение от условието на Задача 1, което ще разглеждаме в по-общия случай над $\mathbb{Q}$. Ще докажем, че тя притежава следните свойства:

Свойство 1. $f(f(x)) = 2f(x) + f(0)$ за $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Да положим $a = 0$ в уравнението. Имаме $f(0) + 2f(b) = f(f(b))$ за $\forall b \in \mathbb{Q}$, т.е. наистина за $\forall x \in \mathbb{Q}$ е изпълнено $f(f(x)) = 2f(x) + f(0)$. В частност $f(f(a)) = 2f(a) + f(0)$ за $\forall a \in \mathbb{Q}$ и $f(f(a+b)) = 2f(a+b) + f(0)$ за $\forall a, b \in \mathbb{Q}$.

Свойство 2. $f(2x) = 2f(x) - f(0)$ за $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Да положим $b = 0$ в уравнението. Имаме $f(2a) + 2f(0) = f(f(a))$ за $\forall a \in \mathbb{Q}$. Но съгласно свойство 1 е изпълнено $f(f(a)) = 2f(a) + f(0)$. Оттук $f(2a) + 2f(0) = 2f(a) + f(0)$ и следователно $f(2a) = 2f(a) - f(0)$.

По-нататък заместяваме $f(2a)$ в изходното уравнение и получаваме $2f(a) - f(0) + 2f(b) = f(f(a+b))$. Съгласно свойство 1 дясната страна е равна на $2f(a+b) + f(0)$. Тогава $2f(a) - f(0) + 2f(b) = 2f(a+b) + f(0)$ и оттук

$$f(a) + f(b) = f(a+b) + f(0) \text{ за } \forall a, b \in \mathbb{Q}.$$

От полученото равенство следва, че $f(x+y) - f(x) - f(y) = -f(0)$ за $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

Нека сега $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ е такава функция, че $g(x) = f(x) - f(0)$ за $\forall x \in \mathbb{Q}$. Тогава $g(x+y) - g(x) - g(y) = f(x+y) - f(0) - f(x) + f(0) - f(y) + f(0) =$
 $= (f(x+y) - f(x) - f(y)) + f(0) = -f(0) + f(0) = 0$.

Следователно $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

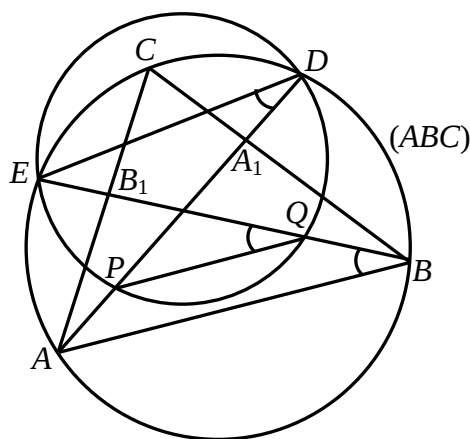
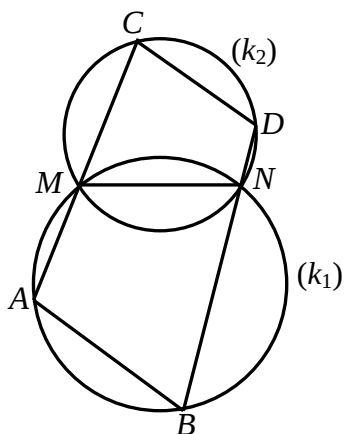
Получихме функционалното уравнение на Коши за функцията g . Като използваме доказаната по-горе теорема, заключаваме, че $g(x) = cx$, $x \in \mathbb{Q}$, където $c = g(1)$. Тогава всички решения на уравнението от условието на Задача 1. са $f(x) = g(x) + f(0)$, т.е. всички решения на това уравнение са от вида $f(x) = cx + k$, като сега $c, k \in \mathbb{Z}$. Заместваме в уравнението и получаваме

$$2ca + k + 2cb + 2k = c^2(a+b) + ck + k,$$

което трябва да бъде изпълнено за всички цели стойности на a и b . В частност при $a = b = 0$ получаваме $(c-2)k = 0$ и оттук $k = 0$ или $c = 2$. Случаят $k = 0$ води до $2c(a+b) = c^2(a+b)$, което е възможно само ако $c = 0$ (защото трябва да е изпълнено за всички цели стойности на a и b). В случая $c = 2$, след заместване получаваме, че k може да е произволно цяло число. Окончателно решенията на Задача 1. са $f(x) \equiv 0$ и $f(x) = 2x + k$ за произволно цяло число k .

Решение на задача 2.

Преди да пристъпим към решението на задачата ще се спрем на няколко факта, които имат и самостоятелно значение.



Теорема 1 на Рейм. Нека окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките M и N . Ако A и B са точки от k_1 , а правите AM и BN пресичат за втори път k_2 съответно в точки C и D , то $AB \parallel CD$.

Доказателство: Тъй като четириъгълниците $ABNM$ и $MNDC$ са вписани съответно в k_1 и k_2 , то $\angle ABN = 180^\circ - \angle AMN = \angle NMC = 180^\circ - \angle NDC$. Оттук $\angle ABN + \angle NDC = 180^\circ$ и следователно $AB \parallel CD$ (свойство на съответните ъгли).

Теорема 2 на Рейм. Нека четириъгълникът $ABNM$ е вписан в окръжност k_1 . Ако точките C и D са съответно върху правите AM и BN така, че $AB \parallel CD$, то точките M, N, D и C лежат на една окръжност.

Доказателство: Тъй четириъгълникът $ABNM$ е вписан, то $\angle ABN = 180^\circ - \angle AMN = \angle NMC$. Но $\angle ABN + \angle NDC = 180^\circ$ (съответни ъгли), защото $AB \parallel CD$. Следователно $\angle NMC + \angle NDC = 180^\circ$ и заключаваме, че четириъгълникът $MNDC$ е вписан.

Еквивалентна формулировка на теорема 2 на Рейм. Даден е $\triangle ABC$ с описана около него окръжност (ABC) . Нека A_1 е точка от вътрешността на страната BC и нека правата AA_1 пресича (ABC) за втори път в точката D , а B_1 е точка от вътрешността на страната AC и правата BB_1 пресича (ABC) за втори път в точката E . Нека P и Q са точки съответно върху отсечките AA_1 и BB_1 така, че $PQ \parallel AB$. Тогава около четириъгълника $PQDE$ може да се опише окръжност.

Доказателство: Тъй като четириъгълникът $ABDE$ е вписан, то $\angle ABE = \angle ADE$. Но от успоредността $PQ \parallel AB$ следва, че $\angle ABE = \angle PQE$ и заключаваме, че $\angle ADE = \angle PQE$, което е достатъчно да твърдим, че около четириъгълника $PQDE$ може да се опише окръжност.

Теорема 1 и теорема 2 могат да се обединят в една като необходимо и достатъчно условие: Нека четириъгълникът $ABNM$ е вписан в окръжност k_1 , а точките C и D са съответно върху правите AM и BN . Правите AB и CD са успоредни тогава и само тогава, когато точките M, N, D и C лежат на една окръжност.

В редица източници именно тази формулировка е известна като теорема на Рейм.

Теорема 3 на Рейм. Нека окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките M и N . Ако A и B са точки от k_1 , а правата AM пресича за втори път k_2 в точка C и D е точка върху k_2 така, че $AB \parallel CD$, то точките B, N и D лежат на една права.

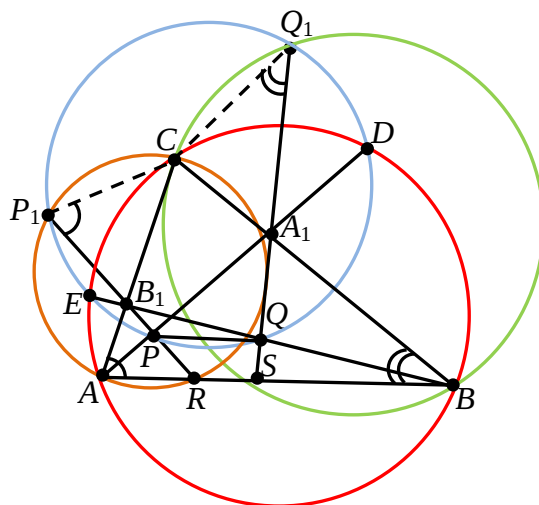
Доказателство: Тъй като четириъгълниците $ABNM$ и $MNDC$ са вписани съответно в k_1 и k_2 , то $\angle ABN = 180^\circ - \angle AMN = \angle NMC = 180^\circ - \angle NDC$. Оттук $\angle ABN + \angle NDC = 180^\circ$. Но $AB \parallel CD$ и последното равенство е възможно само ако B, N и D лежат на една права.

Забележка. В приложенията теоремите на Рейм се използват като достатъчни условия за успоредност, колинеарност или доказване, че четири точки лежат на една окръжност.

Пристъпваме към решение на задача 2.

Нека AA_1 и BB_1 пресичат за втори път описаната окръжност (ABC) около $\triangle ABC$ съответно в точките D и E . Нека правите PB_1 и QA_1 пресичат страната AB съответно в точките R и S . От условието на задачата следва, че около четириъгълниците $ARCP_1$ и SBQ_1C могат да се опишат окръжности. От свойството на пресичащите се хорди в първата от тях следва, че $B_1C \cdot B_1A = B_1P_1 \cdot B_1R$. Но от същото свойство спрямо описаната окръжност (ABC) имаме $B_1C \cdot B_1A = B_1B \cdot B_1E$ и следователно $B_1P_1 \cdot B_1R = B_1B \cdot B_1E$. Тъй

като $\Delta B_1PQ \sim \Delta B_1RB$, то $\frac{B_1B}{B_1Q} = \frac{B_1R}{B_1P}$, откъдето $B_1B \cdot B_1P = B_1Q \cdot B_1R$. Умножаваме левите и десните страни на това равенство и на полученото по-горе $B_1P_1 \cdot B_1R = B_1B \cdot B_1E$.



След съответни съкращения стигаме до $B_1P \cdot B_1P_1 = B_1Q \cdot B_1E$. Но това означава, че точките P, Q, P_1 и E лежат на една окръжност, т.е. точката P_1 лежи на окръжността, определена от точките P, Q и E .

По същия начин от свойството на пресичащите се хорди спрямо описаната окръжност около SBQ_1C следва, че $A_1C \cdot A_1B = A_1Q_1 \cdot A_1S$, а от същото свойство за (ABC) имаме, че $A_1C \cdot A_1B = A_1A \cdot A_1D$. Тогава $A_1Q_1 \cdot A_1S = A_1A \cdot A_1D$. Тъй като $\Delta A_1QP \sim \Delta A_1SA$, то $\frac{A_1A}{A_1P} = \frac{A_1S}{A_1Q}$ и следователно $A_1A \cdot A_1Q = A_1P \cdot A_1S$. Умножаваме левите и десните страни на това равенство и на полученото по-горе $A_1Q_1 \cdot A_1S = A_1A \cdot A_1D$. След съответни съкращения стигаме до $A_1Q \cdot A_1Q_1 = A_1P \cdot A_1D$. Но това означава, че точките P, Q, Q_1 и D лежат на една окръжност, т.е. точката Q_1 лежи на окръжността, определена от точките P, Q и D .

Остава да забележим, че съгласно еквивалентната формулировка на теорема 2 на Рейм точките P, Q, D и E лежат на една окръжност. Следователно окръжността, определена от точките P, Q и E , съвпада с окръжността, определена от точките P, Q и D . В частност това означава, че точките P, Q, P_1 и Q_1 лежат на една окръжност, което трябваше да се докаже.

Решение на задача 3.

Ще използваме очевидната интерпретация на задачата с помощта на графи, върховете на които са потребителите, а ребра между върховете са приятелствата между съответните потребители. *Свързан граф* е този, за който между всеки два негови върха съществува *път* (последователност от ребра), който ги свързва. Частен случай на свързан граф е т. нар. *пълен граф*, всеки два върха на който са свързани с ребро. Пълният граф с n върха се означава с K_n . *Степен на връх* е друго често използвано понятие в теорията на графите. Това е броят на ребрата, които излизат от даден връх.

Един връх е *четен*, ако от него излизат четен брой ребра. Върхът е *нечетен*, ако от него излизат нечетен брой ребра. Ще наричаме два върха *съседни*, ако те са свързани с ребро. По-нататък събитието от условието на задачата ще наричаме *операция*.

Нека G е графът от условието на задачата. Да обърнем внимание, че върховете на G могат да се разделят на две групи. Едната група съдържа 1010 върха, всеки от които е съседен на 1009 върха, а останалите 1009 върха са във втората група и всеки от тях е съседен на 1010 върха.

Лема 1. G притежава нечетни върхове.

Доказателство: Върховете, които имат по 1009 съседни върха, са от нечетна степен и следователно са нечетни.

Лема 2. G е свързан граф.

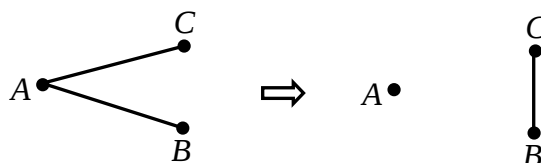
Доказателство: Да разгледаме връх X , който има 1009 съседни върха $A_1, A_2, \dots, A_{1009}$. Ясно е, че множеството, съдържащо X , върховете $A_1, A_2, \dots, A_{1009}$ и свързващите ги с X ребра, представлява свързан граф. В този случай става дума за *подграф* на дадения граф. Нека $Y \in G$ е връх на графа, различен от X . От забележката по-горе следва, че той е съседен на 1009 или 1010 върха. Нека съседните му върхове са 1009. Означаваме ги с $B_1, B_2, \dots, B_{1009}$. Да разгледаме подграфа, съдържащ Y , върховете $B_1, B_2, \dots, B_{1009}$ и свързващите ги с Y ребра. Този подграф е също свързан. Двата подграфа имат общо $1010 + 1010 = 2020$ върха и тъй като $2020 > 2019$, те имат поне един общ връх. Но това е достатъчно да твърдим, че G е свързан. Във втория случай нека 1010-те съседни върха на Y са $B_1, B_2, \dots, B_{1010}$. Можем да разгледаме трети подграф, съдържащ Y , върховете $B_1, B_2, \dots, B_{1010}$ и свързващите ги с Y ребра, който отново е свързан. Сега този подграф заедно с първия имат общо $1010 + 1011 = 2021$ върха. Но $2021 > 2019$ и отново двата подграфа имат общ връх. Пак получаваме, че G е свързан.

Лема 3. G не е пълен граф.

Доказателство: Следва директно от условието на задачата. Нещо повече, за всяко $1011 \leq n \leq 2019$ графът G не съдържа подграф с n върха, който е K_n , т.е. който е пълен. Например, ако допуснем, че G_{1011} е подграф на G , който е K_{1011} , то всичките му 1011 върха (които са повече от 1009) имат по 1010 съседа и това противоречи на условието на задачата. Също така, всичките му 1011 върха (които са повече от 1010) имат по 1010 съседа (които са повече от 1009) и това отново противоречи на условието на задачата. Разсъжденията са аналогични за всяко $1011 < n \leq 2019$.

Лема 4. Четността на върховете на G е инвариантна относно разглежданата операция (т.е. относно събитията от условието на задачата).

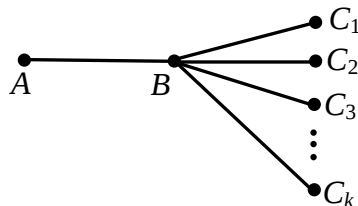
Доказателство: Схемата по-долу показва какво се случва след реализация на разглежданата операция спрямо тройката (B, A, C) : степента на A намалява с 2, а степените на B и C остават непроменени.



Ще наречем един граф **разрешим**, ако с помощта на последователни операции той може да се редуцира до граф, всеки връх на който е със степен, не по-голяма от 1.

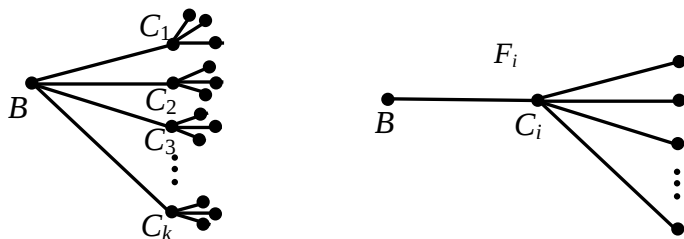
Твърдение. Ако един граф G е свързан и има връх със степен 1, то той е разрешим.

Доказателство: Да допуснем, че твърдението не е вярно и в множеството на всички свързани графи, които имат връх със степен 1 и за които твърдението не е вярно, да разгледаме графа с най-малко ребра. Да означим този граф с M . Нека A е връх в M със степен 1 и нека B е върхът, с който A е свързан. Нека (освен A) $C_1, C_2, \dots, C_k$ са останалите съседни на B върхове.



Случай 1. Съществува ребро BC_i ($1 \leq i \leq k$), след премахването на което графът остава свързан. В този случай, ако приложим операцията спрямо тройката (ABC_i) и изтрием реброто BC_i , ще получим граф с по-малко ребра, който ще бъде свързан и ще има връх със степен 1 (това е върхът A). Новият граф е разрешим, защото в противен случай ще се наруши условието за минималност на избрания граф M . Но щом новият граф е разрешим, то и първоначалният G е също разрешим. Заклучаваме, че допускането не е вярно.

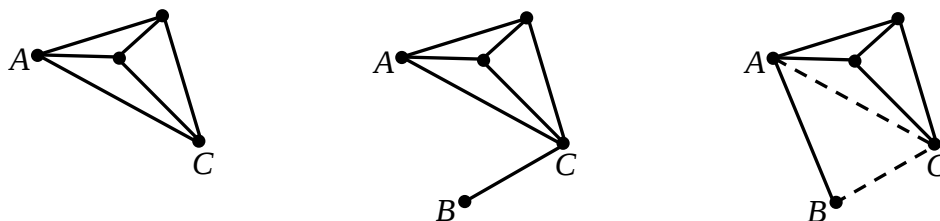
Случай 2. Ако условието от случай 1 не е изпълнено, нека F_i ($1 \leq i \leq k$) е подграф, който съдържа C_i и всички свързани с C_i върхове. Ясно е, че F_i е свързан граф, който съдържа B , но не съдържа C_j за всяко $j \neq i$ (заради случая, който разглеждаме). При това B е със степен 1 в F_i . Следователно F_i е разрешим заради минималността на M . Да разрешим последователно F_i за всяко $1 \leq i \leq k$. Излиза, че G е разрешим и това противоречи на допускането.



Вече сме готови да решим задачата.

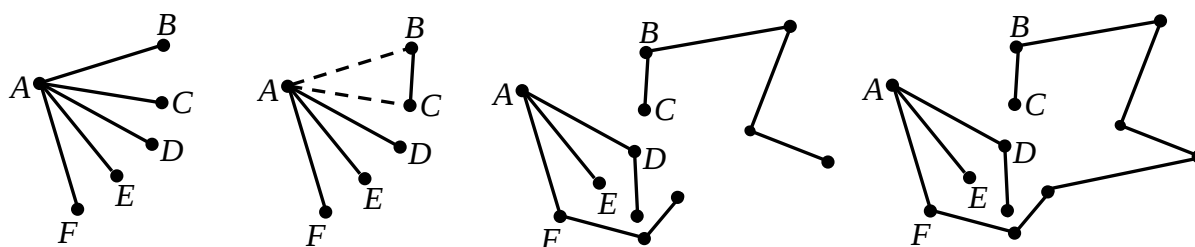
Продължение на решението на задача 3: По подобие на доказателството на твърдението по-горе, нека в множеството на всички свързани и непълни графи с 2019 върха, които имат нечетен връх и за които твърдението не е вярно, да разгледаме графа с най-малко ребра. Да означим този граф отново с M . Нека A е нечетен връх в него, за степента на който предполагаме, че е най-малко 3.

Случай 1. Нека всеки два съседни върха на A са свързани с ребро.



M е свързан, но не е пълен и следователно съществува връх B , който е на разстояние 2 ребра от A , например ребрата AC и BC . Да приложим операцията спрямо тройката (A, C, B) (вж. чертежа). Графът остава свързан и следователно е разрешим, което противоречи на допускането.

Случай 2. Нека B и C са съседи на A , които не са свързани с ребро (вж. първия чертеж). Свързваме ги (вж. втория чертеж), като приложим операцията спрямо тройката (B, A, C) . Върховете B и C индуцират (разглеждани със свързващите ги ребра) свързан подграф. Ако той не съдържа A , разглеждаме останалата част, която съдържа A (вж. третия чертеж). Ако съдържа A (вж. четвъртия чертеж), разглеждаме целия граф (разбира се без изтритите ребра AB и AC). И в двата случая задачата се свежда до разглеждане на свързан граф с връх A , който е с нечетна степен съгласно лема 4 и можем да повторим разсъжденията от случай 1 и случай 2 в зависимост от ситуацията.



Решение на задача 4.

Да обърнем внимание, че в израза от условието на задачата множителите от дясната страна са разлики на числото 2^n и последователните степени на двойката от 2^0 до 2^{n-1} . Една от идеите за решаване на задачата е в сравняване на най-високите степени на двойката, които делят лявата и дясната страна на равенството. Тях ще означаваме съответно с LHS (left hand side = страна) и RHS (right hand side = дясна страна). В тази връзка ще използваме известното в математиката означение $v_p(n)$. С него се бележи най-високата степен на простото число p , която дели естественото число n . В конкретния случай ще сравняваме $v_p(LHS)$ и $v_p(RHS)$, т.е. $v_p(k!)$ и $v_p((2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}))$. Функцията $v_p(n)$ при фиксирано p притежава следното очевидно адитивно

$$\text{Свойство 1.} \quad v_p(n) = v_p(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) = \sum_{i=1}^m (v_p(p_i))^{k_i}, \quad \text{където } p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} \text{ е}$$

каноничното разлагане на n .

Свойство 2. Непосредствено от горното следва, че

$$v_2(k!) = v_2(1) + v_2(2) + \dots + v_2(k).$$

Първа формула на Лъожандър (Андриан-Мари Лъожандър (1752 – 1833) е френски математик, чието име е едно от 72-те имена, изписани на Айфеловата кула).

Формулата гласи, че $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$, където $\lfloor x \rfloor$ е най-голямото естествено число, ненадминаващо x (тук n е естествено число, а p е просто).

Доказателство: Да обърнем внимание, че $v_p(i) = \begin{cases} = 0, & \text{ако } i \text{ не се дели на } p \\ > 0, & \text{ако } i \text{ се дели на } p \end{cases}$.

Съгласно свойство 2 имаме

$$v_p(n!) = v_p(1) + v_p(2) + \dots + v_p(n) = v_p(p) + v_p(p^2) + v_p(p^3) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} v_p(p^i).$$

При $i=1$ числото $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ е броят на кратните на простото число p измежду $1, 2, \dots, n$.

Аналогично, при $i > 1$ числото $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ е броят на кратните на p^i измежду $1, 2, \dots, n$.

Тогава $\sum_{i=1}^{\infty} v_p(p^i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$, т.е. $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$, което трябваше да се докаже.

Разбира се, всички суми по-горе, както и сумата във формулата на Лъожандър, са крайни, защото например $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = 0$ при $p^i > n$.

Нека $S_p(n)$ е сборът на цифрите в записа на естественото число n при основа p (тук не е задължително p да е просто число).

Втора формула на Лъожандър. $v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}$ (тук отново n е естествено число, а p е просто).

Доказателство: Втората формула на Лъожандър е следствие от първата. Нека $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_m p^m$ е записът на n при основа p и нека $i \leq m$. Тогава

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor &= n_i + n_{i+1} p + \dots + n_m p^{m-i} \text{ и} \\ v_p(n!) &= \sum_{i=1}^m \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^m (n_i + n_{i+1} p + \dots + n_m p^{m-i}) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m n_j p^{j-i} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j n_j p^{j-i} = \sum_{j=1}^m n_j \sum_{i=1}^j p^{j-i} = \left(\sum_{j=0}^m n_j \right) \left(\frac{p^j - 1}{p - 1} \right) = \\ &= \frac{1}{p - 1} \sum_{j=0}^m (n_j p^j - n_j) = \frac{1}{p - 1} \left(\sum_{j=0}^m n_j p^j - \sum_{j=0}^m n_j \right) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}. \end{aligned}$$

Лема 1. За всяко естествено число k е в сила неравенството $v_2(k!) < k$.

Доказателство: От втората формула на Лъожандър следва, че $v_2(k!) = k - S_2(k)$ и следователно наистина $v_2(k!) < k$.

Лема 2. Ако (k, n) е решение на задача 4, то $k > \frac{n(n-1)}{2}$.

Доказателство: Имаме

$$\begin{aligned} v_2(RHS) &= v_2((2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1})) = \sum_{i=0}^{n-1} v_2(2^n - 2^i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} v_2(2^i(2^{n-i} - 1)) = \sum_{i=0}^{n-1} v_2(2^i) + \sum_{i=0}^{n-1} v_2(2^{n-i} - 1) = \sum_{i=0}^{n-1} v_2(2^i) = 1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Тъй като $v_2(k!) = v_2(LHS) = v_2(RHS) = \frac{n(n-1)}{2}$, от лема 1 следва, че наистина $k > \frac{n(n-1)}{2}$.

Решение 1 на задача 4. Нека (k, n) е решение на задача 4. Тогава $k > \frac{n(n-1)}{2}$

съгласно лема 2. Оттук $k! > \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!$. От друга страна, като използваме, че броят на множителите в RHS е n и $2^n - 2^i < 2^n$, получаваме $RHS < (2^n)^n = 2^{n^2}$. Тогава

$$\begin{aligned} 2^{n^2} &> k! > \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! = 1.2.3.4.5.6.7 \dots \frac{n(n-1)}{2} > \\ &> 1.2.2.4.4.4.4. \left(\frac{n(n-1)}{2} - 7\right) > 1.2.2.4.4.4.4.8 \left(\frac{n(n-1)}{2} - 7\right) = 2^{10+3\left(\frac{n(n-1)}{2}-7\right)}. \end{aligned}$$

Оттук $n^2 > 10 + 3\left(\frac{n(n-1)}{2} - 7\right)$ и $n^2 - 3n - 22 < 0$, което е изпълнено само за

естествените числа 1, 2, 3, 4, 5, и 6, защото $6 < \frac{3+\sqrt{97}}{2} < 6,5$, където

$$n^2 - 3n - 22 = \left(n - \frac{3-\sqrt{97}}{2}\right) \left(n - \frac{3+\sqrt{97}}{2}\right).$$

С непосредствена проверка установяваме, че единствените решения на задачата са $(k, n) = (1, 1)$ и $(k, n) = (3, 2)$. Наистина, при $n = 3$ или 5 числото $2^n - 1$ е просто (7 или 31) и тъй като $2^n - 1$ дели $k!$, то $2^n - 1 < k$. Но тогава $(2^n - 1)! < k!$, което не е възможно, защото сега $RHS < (2^n - 1)! < k! = LHS$ и излиза, че $RHS < LHS$. Ако $n = 4$, то $v_2(RHS) = 6$ и оттук следва, че $k \geq 8$, за да се подсигури шеста степен на двойката в LHS . Но тогава $v_2(LHS) \geq 7$ и това е противоречие. Ако $n = 6$, RHS се дели на $2^6 - 2 = 62 = 2.31$ и следователно се дели на простото число 31. Тогава $k \geq 31$. Оттук

следва, че $k!$ се дели например на простото число 29, което не е изпълнено за RHS . Отново стигаме до невъзможност. При $n=1$ имаме $RHS=1$ и $k=1$, като по този начин получаваме решението $(k,n)=(1,1)$. При $n=2$ имаме $RHS=6$ и $k=3$, като този път получаваме решението $(k,n)=(3,2)$.

Ще разгледаме други решения на задача 4. За тази цел ще използваме допълнителна информация.

Лема 3. Ако n е естествено число, то $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Доказателство: С помощта на биномната формула на Нютон получаваме:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \end{aligned}$$

За израза $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ по-горе използвахме формулата за сумата на първите $n-1$ члена на геометрична прогресия с първи член $\frac{1}{2}$ и частно $\frac{1}{2}$.

Лема 4. Ако n е естествено число, то $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$.

Доказателство: Ще използваме индукция. При $n=1$ неравенството е изпълнено. Да допуснем, че $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$. Тогава $(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot (n+1)$, т.е.

$(n+1)! > \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot (n+1)$. Но $\left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot (n+1) > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$, защото това неравенство е еквивалентно с $n^n > \frac{(n+1)^n}{3}$, а последното е еквивалентно с $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$, т.е. с

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, което е твърдението в лема 2.

Решение 2 на задача 4. Нека (k,n) е решение на задача 4. Съгласно лема 2

$\frac{n(n-1)}{2} < k$, което е еквивалентно с $\frac{n(n-1)}{2} \leq k-1$, т.е. с $\frac{n^2 - n + 2}{2} \leq k$. Оттук

$$\frac{n^2 - n + 2}{2} \leq k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}) < 2^n \cdot 2^n \dots 2^n = (2^n)^n = 2^{n^2}, \text{ т.е.}$$

$\frac{n^2 - n + 2}{2}! < 2^{n^2}$. Сега, от лема 4 имаме $\left(\frac{n^2 - n + 2}{6} \leq k\right)^{\frac{n^2 - n + 2}{2}} < 2^{n^2}$ и като логаритмуваме при основа 2, стигаме до $\frac{n^2 - n + 2}{2} \log_2 \left(\frac{n^2 - n + 2}{6}\right) < n^2$. При $n > 7$ е изпълнено $\frac{n^2 - n + 2}{6} > 8$ и тъй като $\log_2 8 = 3$, то $3 \cdot \frac{n^2 - n + 2}{2} > n^2$. Заклучаваме, че неравенството

$$\frac{n^2 - n + 2}{2} \log_2 \left(\frac{n^2 - n + 2}{6}\right) < n^2$$

е изпълнено само при $n \leq 7$. Като използваме проверката от първото решение, установяваме, че $(k, n) = (1, 1)$ и $(k, n) = (3, 2)$ са решения. За единствеността е достатъчно да се провери случаят $n = 7$. Сега числото $2^7 - 1 = 127$ е просто и тъй като $2^7 - 1$ дели $k!$, то $2^7 - 1 < k$. Но тогава $(2^7 - 1)! < k!$, което не е възможно, защото сега $RHS < (2^7 - 1)! < k! = LHS$ и излиза, че $RHS < LHS$.

В изложеното решение съществено се използва лема 4, която е свързана с израза $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, изучаван в диференциалното и интегралното смятане, т.е. в анализа. По-точно връзката е, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, където e е Неперовото число. Ще дадем още едно решение на задача 4 без използване на факти от анализа, като заедно с функцията $v_2(n)$ ще разглеждаме и функцията $v_3(n)$.

Лема за повдигане на експонентата (Lifting the exponent lemma). Ще означаваме тази лемата с *LTE* съгласно общоприетия начин. Тя гласи: Нека p е просто число, n е естествено, а x и y са цели. Ако $p \mid (x - y)$, но $p \nmid x$ и $p \nmid y$, то

(1) ако p е нечетно,

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n);$$

(2) ако $p = 2$ и n е четно,

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n) + v_2(x + y) - 1.$$

В случай, че n е нечетно, можем да заменим $-y$ с y в (1) и ще получим

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n), \text{ ако } p \mid (x + y).$$

Доказателство: Нека p е нечетно (случаят $p = 2$ се разглежда аналогично). Предполагаме, че $p \mid (x - y)$, $p \nmid x$ и $p \nmid y$.

Стъпка 0: Ако $p \nmid a$, то $v_p(x^a - y^a) = v_p(x - y)$. Последното следва така:

Тъй като $\frac{x^a - y^a}{x - y} = x^{a-1} + x^{a-2}y + \dots + xy^{a-2} + y^{a-1}$ и $x \equiv y \pmod{p}$, получаваме $x^{a-1} + x^{a-1} + \dots + x^{a-1} + x^{a-1} = ax^{a-1} \pmod{p}$. Последното е различно от нула, защото

$p \nmid a$ и $p \nmid x$.

Стъпка 1: Ако $n = p$, то

$$v_p(x^p - y^p) = v_p(x^p - y^p) + v_p(x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + xy^{p-2} + y^{p-1})$$

и идеята е да се покаже, че последното е равно на $v_p(p) = 1$. Да положим $y = x + pk$ за подходящо k . Ще представим израза по степените на p по mod p^2 (премахвайки членовете с p^2 и по-висока степен). Имаме:

$$\begin{aligned} & x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + xy^{p-2} + y^{p-1} \equiv \\ & \equiv x^{p-1} + (x^{p-1} + pkx^{p-2}) + (x^{p-1} + 2pkx^{p-2}) + \dots + (x^{p-1} + (p-1)pkx^{p-2}) \equiv \\ & \equiv px^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} pkx^{p-2} \equiv px^{p-1} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Заклучаваме, че изразът се дели на p , но не се дели на p^2 .

Стъпка 2: Нека $n = p^k a$, където $p \nmid a$. Ще използваме предните две стъпки:

$$v_p(x^n - y^n) = v_p((x^{p^k})^a - (y^{p^k})^a) = v_p(x^{p^k} - y^{p^k}) \quad (\text{Стъпка 0})$$

$$= v_p((x^{p^{k-1}})^p - (y^{p^{k-1}})^p) = v_p(x^{p^{k-1}} - y^{p^{k-1}}) + 1 \quad (\text{Стъпка 1})$$

и след няколко итерации стигаме до $v_p(x - y) + k$, което е равно на $v_p(x - y) + v_p(n)$.

Решение 3 на задача 4. Ако (k, n) е решение на задача 4, имаме:

$$\begin{aligned} (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}) &= 2^{0+1+2+\dots+n-1} (2^n - 1)(2^{n-1} - 1)(2^{n-2} - 1) \dots (2 - 1) = \\ &= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} (2^n - 1)(2^{n-1} - 1)(2^{n-2} - 1) \dots (2 - 1). \end{aligned}$$

Множителите в произведението $(2^n - 1)(2^{n-1} - 1)(2^{n-2} - 1) \dots (2 - 1)$ се делят на 3 само ако съответните степени на двойката са четни числа. Техният брой е $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. От LTE следва,

че $v_3(2^{2^j} - 1) = v_3((4)^j - 1) = v_3(4 - 1) + v_3(j) = 1 + v_3(j)$. Тогава

$$v_3(k!) = v_3(RHS) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} v_3(j) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + v_3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor!\right), \quad \text{откъдето } v_3(k!) - v_3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor!\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

т.е. $v_3(k!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + v_3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor!\right)$. От втората формула на Лъожандър следва, че

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + v_3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor!\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - S_3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)}{3-1} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{3}{4} n.$$

От друга страна, първата формула на Лъожандър дава оценката (доста груба, но върши работа) $v_3(k!) \geq \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor > k - 1$ и следователно $k - 1 < \frac{3}{4} n$, т.е. $k < \frac{9n}{4} + 3$. Но съгласно лема

2 имаме $\frac{n(n-1)}{2} < k$. Така стигаме до $\frac{n(n-1)}{2} < k < \frac{9n}{4} + 3$, откъдето $\frac{n(n-1)}{2} < \frac{9n}{4} + 3$ и следователно $2n^2 - 11n - 12 < 0$. Последното неравенство е изпълнено само в интервала $\frac{11 - \sqrt{217}}{4} < n < \frac{11 + \sqrt{217}}{4}$, т.е. само за естествените числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. С непосредствена проверка, както в първото решение на задачата, установяваме, че единствените решения са $(k, n) = (1, 1)$ и $(k, n) = (3, 2)$.

Решение на задача 5.

Всяко изпълнение на операцията от условието на задачата ще наричаме *ход*. Една монета е *H-монета*, ако *H* е разположена от видимата част на монетата. В противен случай монетата е *T-монета*.

Лема. Ако всички монети в конфигурация с дължина n са *H-монети*, то след n хода те стават *T-монети*.

Доказателство: Следва от схемата по-долу:

$$HH...HH \rightarrow HH...HT \rightarrow HH...HTT \rightarrow HH...TTT \rightarrow .. \rightarrow .HT...TTT \rightarrow TT...TTT.$$

Пристъпваме към решението на задача 5.

а) Ще докажем твърдението по индукция относно n . То е очевидно вярно при $n = 1$. Да допуснем, че е вярно за всяко $k \leq n$ при някое n . Ще го докажем при $n + 1$. Ако последната монета в конфигурация от $n + 1$ монети е *T-монета*, тя остава непроменена до края (за да бъде променена, трябва да има $n + 1$ на брой *H-монети*, но толкова няма как да има). Задачата се свежда до случая n , при който твърдението е вярно съгласно индуктивното предположение.

Ако последната монета в конфигурацията е *H-монета*, да разгледаме най-лявата *T-монета*. Нека тя е i -ата поред. Ще покажем, че след известен (краен) брой ходове въпросната *T-монета* се променя в *H-монета*. Да разгледаме отрязък от конфигурацията, включващ всички монети от $(i + 1)$ -ата надясно до n -ата включително. Ако монети в него са *T-монети*, броят на всички *H-монети* в цялата конфигурация е $i - 1 + 1 = i$ и това води до промяна на разглежданата *T-монета*. Нека сега отрязъкът съдържа поне една *H-монета*. Тогава броят на всички *H-монети* в цялата конфигурация е по-голям от i . Ако той не намалее, за да стане равен на i и да се промени въпросната *T-монета*, броят ще остане по-голям от i и ще се променя между $i + 1$ и n . Това означава, че всички ходове ще се изпълняват в отрязък. Но размерът на отрязък е по-малък от n и можем да приложим индуктивното предположение. Така всички монети в отрязък стават *T-монети*, а броят на *H-монетите* в цялата конфигурация става равен на i . Заклучаваме, че наистина въпросната най-лява *T-монета* става *H-монета*.

Доказахме, че най-лявата *T-монета* се „премества“ надясно след краен брой ходове и в крайна сметка, отново след краен брой ходове, всички монети в началната конфигурация ще станат *H-монети*. Сега е достатъчно да приложим лемата.

б) Нека N_n е сборът на ходовете, които водят докрай относно всички 2^n възможни начални конфигурации от n монети. Ще докажем, че

$$\frac{N_n}{2^n} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

При $n=1$ възможните конфигурации са две: H и T . При това $L(H)=1$, $L(T)=0$, $N_1=1+0=1$, $\frac{N_1}{2^1}=\frac{1}{2}$ и формулата е изпълнена. При $n=2$ възможните конфигурации са четири: HH , HT , TH и TT . При това $L(HH)=2$, защото ходовете са: $HH \rightarrow HT \rightarrow TT$. $L(HT)=1$, защото ходът е единствен: $HT \rightarrow TT$. $L(TH)=3$, защото ходовете са: $TH \rightarrow HH \rightarrow HT \rightarrow TT$. И $L(TT)=0$. Тогава $\frac{N_2}{2^2} = \frac{2+1+3+0}{4} = \frac{3}{2}$ и формулата отново е изпълнена.

За да докажем формулата в общия случай, първоначално ще пресметнем N_{n+1} . Както беше отбелязано в а), ако последната монета в конфигурация от $n+1$ монети е T -монета, тя остава непроменена до края. Затова в сумата N_{n+1} фигурират и ходовете за довеждане докрай на конфигурациите от този вид, т.е. в N_{n+1} фигурира N_n . В случай, че последната монета е H -монета, разглеждаме отново най-лявата T -монета. С j означаваме броя на монетите, започвайки с монетата непосредствено вдясно от T и завършвайки с n -ата монета (включително). Ще проследим какво се случва при фиксирано j и след това ще сумираме по всички възможни стойности на j . От конфигурацията $HH...HT...H$ се стига до $HH...HTT...TH$ с N_j хода, разглеждани върху всички 2^j конфигурации. След това имаме $HH...HTT...TH \rightarrow HH...HHH \rightarrow TT...TTT$, което се постига точно с $j+1+n+1=n+j+2$ хода. Това е така, защото броят на H -монетите в конфигурацията $HH...HTT...TH$ е $n+1-(j+1)=n-j$ и най-лявата T -монета е $(n-j)$ -а поред отляво надясно. При това с $j+1$ хода се стига до $HH...HHH$ и с $n+1$ хода до $TT...TTT$. Бройката $n+j+2$ следва да се умножи с 2^j . Ако $j=0$, то допълнително следва да се отчете и конфигурацията $HH...HTH$ (с единствена T -монета), при която $HH...HTH \rightarrow HH...HHH$ с един ход и $HHH \rightarrow TT...TTT$ с $n+1$ хода или общо $n+2$ хода. Следователно

$$N_{n+1} = N_n + \sum_{j=1}^{n-1} (N_j + 2^j(j+1+n+1) + 2n+3).$$

По същия начин за конфигурации с дължина $n+2$ намираме

$$N_{n+2} = N_{n+1} + \sum_{j=1}^n (N_j + 2^j(j+1+n+2) + 2n+5).$$

Тогава:

$$N_{n+2} = N_{n+1} + \sum_{j=1}^n N_j + \sum_{j=1}^{n-1} 2^j(j+1) + 2^n(n+1) + (n+1) \sum_{j=1}^n 2^j + \sum_{j=1}^n 2^j + 2n+5 =$$

$$\begin{aligned}
&= N_{n+1} + N_n + \sum_{j=1}^{n-1} (N_j + 2^j(j+1+n+1)) - \sum_{j=1}^{n-1} 2^j(n+1) + 2^n(n+1) + (n+2) \sum_{j=1}^n 2^j + 2n+3+2 = \\
&= 2N_{n+1} + (n+1) \left(2^n - \sum_{j=1}^{n-1} 2^j \right) + (n+2) \sum_{j=1}^n 2^j + 2 = \\
&= 2N_{n+1} + (n+1)(2^n - 2^n + 2) + (n+2) \sum_{j=1}^n 2^j + 2 = 2N_{n+1} + 2(n+1) + (n+2)(2^{n+1} - 2) + 2 = \\
&= 2N_{n+1} + (n+2)2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Заклучаваме, че $N_{n+2} = 2N_{n+1} + (n+2)2^{n+1}$ и следователно $\frac{N_{n+2}}{2^{n+2}} = \frac{N_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{n+2}{2}$.

Получената зависимост е в сила за всяко естествено число n . Нека $\frac{N_n}{2^n} = A_n$ за всяко n , което дава възможност да запишем зависимостта във вида $A_{n+1} - A_n = \frac{n+1}{2}$. Като го приложим последователно за $1, 2, \dots, n$ и вземем предвид доказаното в началото на решението $A_1 = \frac{1}{2}$, получаваме:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} \\
A_2 - A_1 &= \frac{2}{2} \\
A_3 - A_2 &= \frac{3}{2} \\
&\dots \\
A_{n-1} - A_{n-2} &= \frac{n-1}{2} \\
A_n - A_{n-1} &= \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

След сумиране на левите и десните страни на получените равенство намираме

$$A_n = 2(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Решение на задача 6.

Както обикновено, за ъглите на $\triangle ABC$ ще използваме означенията $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Тъй като по условие $DR \perp EF$, от връзките между ъгли и дъги в ω имаме $\frac{\widehat{ER}}{2} + \frac{\widehat{FD}}{2} = 90^\circ$ и $\widehat{FD} = \sphericalangle DIF = 180^\circ - \beta$. Затова $\frac{\widehat{ER}}{2} = \frac{\beta}{2}$. Следователно $\sphericalangle EFR = \frac{\widehat{ER}}{2} = \frac{\beta}{2}$. Аналогично се получава, че $\sphericalangle FER = \frac{\gamma}{2}$. По този начин установяваме, че $\triangle EFR \sim \triangle BCI$. Освен подобни тези триъгълници са еднакво ориентирани. Този факт

Нека описаните около триъгълниците PCE и PBF са съответно k_c и k_b . От връзките между ъгли и дъги в k_b и ω имаме $\sphericalangle BQP = \frac{\widehat{BP}}{2} = \sphericalangle BFP = \frac{\widehat{FP}}{2} = \sphericalangle FRP$. Аналогично от k_c и ω получаваме $\sphericalangle CQP = \frac{\widehat{CP}}{2} = \sphericalangle CEP = \frac{\widehat{EP}}{2} = \sphericalangle ERP$. От тези равенства следва

Следователно точките B , C , I и Q лежат на една окръжност, т.е. точката Q лежи върху окръжността Ω . Нека втората пресечна точка на PQ с Ω е V . От

окръжността Ω имаме $\sphericalangle BQP = \sphericalangle BQV = \frac{\widehat{BV}}{2}$, а от ω получаваме $\sphericalangle BFP = \frac{\widehat{FP}}{2}$. Освен това от k_b имаме $\sphericalangle BQP = \frac{\widehat{BP}}{2} = \sphericalangle BFP$. Следователно дъгите $\widehat{BV}$ и $\widehat{FP}$ съответстват на равни ъгли в съответните окръжности Ω и ω при h . Тъй като $h(B) = F$, то $h(\widehat{BV}) = \widehat{FP}$. Следователно $h(V) = P$. Тъй като по условие точките A , R и P лежат на една права и $h(LIV) = ARP$, то точките L , I и V също лежат на една права.

Сега от окръжността ω получаваме равенствата

$$\begin{aligned}\sphericalangle DPA = \sphericalangle DPR = \frac{\widehat{DER}}{2} &= \sphericalangle DFR = \sphericalangle DFE + \sphericalangle EFR = \frac{\widehat{DE}}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sphericalangle DIE + \frac{\beta}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \beta.\end{aligned}$$

От четириъгълника $ABDM$ получаваме

$$\sphericalangle AMD = 360^\circ - (\sphericalangle MAB + \sphericalangle ABD + \sphericalangle BDM) = 360^\circ - \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2} + \beta + 90^\circ\right) = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right).$$

Следователно четириъгълникът $ABDM$ е вписан в окръжност k_A . От последното равенство следва още, че $\sphericalangle LMU = \sphericalangle LMD = \frac{\alpha}{2} + \beta = \sphericalangle DPA$. От друга страна $h(\sphericalangle IVU) = \sphericalangle RPD$, което означава, че $\sphericalangle LVU = \sphericalangle IVU = \frac{\alpha}{2} + \beta$. Следователно отсечката UL се вижда под равни ъгли от точките M и V . Затова точките M , L , U и V лежат на една окръжност k_L .

Тъй като $h(\sphericalangle ULV) = \sphericalangle DAP$, то $\sphericalangle DAP = \sphericalangle ULV$. От последното равенство и откритите две окръжности получаваме $\sphericalangle UMP = \sphericalangle DMP = \sphericalangle DAP = \sphericalangle ULV = \sphericalangle UMV$. Следователно правата MU съдържа равни ъгли с правите MP и MV . Тъй като точките P и V лежат в една полуравнина относно правата MU , то правите MP и MV съвпадат. От друга страна по построение точката Q лежи върху правата PV . Следователно точките M , P , V и Q лежат на една права. Това означава, че правата PQ минава през M . С това твърдението на задачата е доказано.

Подробности за въртящата хомотетия, която се използва в решението на задача 6, могат да се намерят в статията „Някои приложения на въртящата хомотетия” от брой 1, 2020 г. на сп. Математика и информатика.