МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА' 2023
Д-р М. Плюс

Поредната 64. международна олимпиада по математика се проведе в гр. Чиба, Япония от 2 до 13 юли 2023 г. В нея взеха участие 618 ученици, от които 67 девойки. Представиха се общо 112 държави, което е изравнен рекорд по отношение на броя участващи държави, поставен през 2019 г. в гр. Бат, Великобритания. По регламент, приблизително половината състезатели получиха медали в отношение 1:2:3 (също приблизително) на златните, сребърните и бронзовите. Журито на олимпиадата разпредели общо 314 медала, от които 54 златни с долна граница 32 точки вкл., 90 сребърни с граници от 25 до 31 точки вкл. и 170 бронзови с граници от 18 до 24 точки вкл. Бяха присъдени и 192 почетни отличия за учениците извън медалистите с поне една пълно решена задача.

Българският отбор заслужи 1 златен, 1 сребърен и 4 бронзови медала, което е отстъпление от миналата година, когато бяхме на 16-то място в отборното класиране, а сега сме на 25-то. Представянето е в рамките на очакванията и затвърждава тенденцията за последните повече от 15 години България да е извън групата на водещите държави. А това са "четирите големи": Китай, САЩ, Русия и Южна Корея. По данни от официалния сайт на международната олимпиада, 9 пъти за последните 24 години от 2000 г. насам точно тези държави са заемали първите четири места. (Тук следва да се отбележи, че Русия не беше допусната до участие на тази олимпиада, както и на миналогодишната в Осло.) Останалите държави са се появявали епизодично в първата четворка. На челно място между тях е България (шесто място, вж. таблицата по-долу), но както беше споменато, това се е случвало преди повече от 15 години. Пораженията, нанесени от бившия ДС активист Кадмий и доказан доносник ПеКе, продължават да тежат. Положителна тенденция все пак е, че се махна протежето на доносника – джуджето-директор ПеБо, за да може през последните три години България да печели поне по един златен медал. Но все още сме далеч от българския триумф през 2003 г., когато на Международната олимпиада отново в Япония спечелихме отборното класиране и шестимата наши представители завоюваха златни отличия. Поне засега не ни остава нищо друго освен да споменаваме с гордост това забележително постижение, което тази година чества своя 20-годишен юбилей и да се надяваме на по-добри представяния в близките години.

Индивидуални победители в тазгодишната олимпиада са 5 ученици, които имат пълен брой точки. Между тях са двама представители на Китай и по един от САЩ, Южна Корея и Румъния. Всички те постигнаха максималния резултат 42 точки. Заедно с един ученик от Южна Кория петимата са единствените участници с пълни решения на най-трудната 6-та задача от темата. Както често се случва (и такава е политиката на международното жури), най-лесна беше задача 1, която е решена напълно от 474 участници. Втората по трудност след задача 6 в низходящ ред е задача 3, която е решена пълно от 73 ученици. Само 1 участник – единственият представител на Танзания, е с 0 точки върху темата. Преди него е представител на отбора на Кения, който има общо 4 точки. По-долу са резултатите на нашите състезатели. Предлагаме ви и класирането по държави, в което България е на 25-то място с общо 149 спечелени точки от 252 възможни (малко над 59%).

Място	Държава	Класирания на първо място	Класирания на второ място	Класирания на трето място	Класирания на четвърто място	Брой призови класирания
1	Китай	17	5	2		24
2	САЩ	4	6	9	2	21
3	Русия	1	9	3	4	17
4	Ю. Корея	2	3	6	6	17
5	Виетнам			2	3	5
6	България	1			2	3
7	Сингапур			1	1	2
8	С. Корея				2	2
9	Япония		1			1
10	Тайван			1		1
11	Германия				1	1
12	Иран				1	1
13	Румъния				1	1
14	Украйна				1	1

64. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2023 Г. КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ

Състезател	**зад. 1**	**зад. 2**	**зад. 3**	**зад. 4**	**зад. 5**	**зад. 6**	**Общо**	**Място**		**Награда**
								Абсолютно класиране	**Резултат в %**	
Божидар Димитров	7	7	1	7	0	0	22	220	64.51%	Бронзов медал
Ангел Христов	7	7	1	7	2	0	24	145	76,66%	Бронзов медал
Марин Христов	7	7	7	7	6	2	36	23	96,43%	Златен медал
Веселин Маркович	7	0	0	7	7	0	21	237	61,75%	Бронзов медал
Илиас Номан	7	1	0	7	5	0	20	259	58,18%	Бронзов медал
Иван Тагарев	7	7	1	7	2	2	26	128	79,42%	Сребърен медал

64. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2023 Г.
КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ ПО ДЪРЖАВИ

държава	брой			P1	P2	P3	P4	P5	P6	Общо	Място	Награди			
		м	ж									зл.	ср.	бр.	гр.
Китай	6	6	0	42	42	42	42	42	30	240	1	6	0	0	0
САЩ	6	6	0	42	42	42	42	37	17	222	2	5	1	0	0
Република Корея	6	6	0	42	40	42	42	33	16	215	3	4	2	0	0
Румъния	6	6	0	42	42	42	42	24	16	208	4	5	1	0	0
Канада	6	6	0	42	29	25	42	38	7	183	5	1	4	1	0
Япония	6	6	0	42	32	27	42	32	6	181	6	2	3	1	0
Виетнам	6	6	0	42	42	21	42	28	5	180	7	2	2	2	0
Турция	6	5	1	42	42	29	42	13	8	176	8	1	5	0	0
Индия	6	6	0	41	35	25	42	26	5	174	9	2	2	2	0
Тайван	6	6	0	42	36	13	42	38	2	173	10	1	4	1	0
Иран	6	6	0	42	42	26	42	16	4	172	11	1	4	1	0
Сингапур	6	6	0	42	42	20	36	29	2	171	12	2	3	0	1
Великобритания	6	6	0	42	30	22	39	34	0	167	13	2	2	2	0
Израел	6	6	0	39	18	28	42	33	3	163	14	1	3	2	0
Мексико	6	6	0	42	31	22	42	24	2	163	14	1	3	2	0
Бразилия	6	6	0	42	38	8	42	29	2	161	16	1	2	3	0
Беларус	6	6	0	42	36	14	42	23	2	159	17	0	4	2	0
Италия	6	6	0	38	41	8	42	29	1	159	17	1	2	3	0
Тайланд	6	6	0	42	31	24	37	24	0	158	19	1	3	1	1
Германия	6	6	0	42	38	11	36	29	0	156	20	0	3	3	0

държава	брой			P1	P2	P3	P4	P5	P6	Общо	Място	Награди			
		м	ж									зл.	ср.	бр.	гр.
Казахстан	6	6	0	42	42	17	41	12	0	154	21	0	2	4	0
Унгария	6	5	1	42	26	11	42	32	0	153	22	1	2	3	0
Австралия	6	4	2	42	38	13	36	19	4	152	23	1	2	2	1
Хонконг	6	6	0	42	16	20	42	27	4	151	24	1	1	4	0
България	**6**	**6**	**0**	**42**	**29**	**10**	**42**	**22**	**4**	**149**	**25**	**1**	**1**	**4**	**0**
Гърция	6	6	0	37	34	12	42	20	0	145	26	1	1	3	1
Филипини	6	6	0	41	28	4	42	30	0	145	26	0	3	3	0
Франция	6	6	0	42	31	5	42	20	2	142	28	0	1	5	0
Нидерландия	6	6	0	42	29	1	42	25	0	139	29	0	1	5	0
Монголия	6	6	0	42	32	7	42	15	0	138	30	1	0	4	1
Украйна	6	2	4	42	27	8	37	20	0	134	31	0	1	5	0
Армения	6	6	0	42	31	6	42	12	0	133	32	0	2	3	1
Перу	6	6	0	37	34	6	36	15	5	133	32	0	2	3	0
Полша	6	6	0	42	21	1	41	28	0	133	32	0	1	4	1
Испания	6	6	0	38	24	4	36	28	1	131	35	0	1	4	1
Босна и Херцеговина	6	6	0	42	37	0	35	16	0	130	36	0	1	4	1
Саудитска Арабия	6	6	0	42	33	3	36	16	0	130	36	0	1	3	2
Грузия	6	5	1	42	17	11	42	16	1	129	38	1	0	4	1
Индонезия	6	5	1	42	22	2	42	20	0	128	39	0	1	3	2
Словакия	6	5	1	42	14	6	42	24	0	128	39	0	1	4	1
Северна Македония	6	6	0	42	28	8	36	11	2	127	41	1	1	2	2

държава	брой			P1	P2	P3	P4	P5	P6	Общо	Място	Награди			
		м	ж									зл.	ср.	бр.	гр.
Сърбия	6	6	0	30	23	4	37	25	1	120	42	0	1	3	2
Швейцария	6	5	1	37	20	11	30	17	2	117	43	1	0	3	1
Малайзия	6	5	1	37	19	8	32	18	0	114	44	1	0	3	2
Чехия	6	5	1	39	8	2	36	27	0	112	45	0	0	4	1
Бангладеш	6	5	1	37	25	6	36	6	0	110	46	0	0	3	2
Естония	6	6	0	42	22	3	28	13	0	108	47	0	0	3	3
Макао	6	6	0	40	15	1	36	15	0	107	48	0	1	2	3
Австрия	6	6	0	42	18	5	25	16	0	106	49	0	1	1	4
Узбекистан	6	6	0	39	24	0	37	6	0	106	49	0	0	3	3
Южна Африка	6	5	1	40	12	0	36	17	0	105	51	0	1	1	4
Хърватия	6	4	2	42	12	4	32	13	0	103	52	0	0	4	2
Кипър	6	6	0	42	23	3	31	4	0	103	52	0	1	1	4
Азербайджан	6	5	1	42	14	2	36	6	2	102	54	0	1	1	4
Латвия	6	5	1	42	14	1	22	22	0	101	55	0	0	3	3
Молдова	6	6	0	39	14	1	42	3	2	101	55	0	0	3	3
Алжир	6	6	0	36	21	2	31	8	2	100	57	0	0	2	4
Дания	6	4	2	37	9	5	30	14	2	97	58	0	0	2	3
Аржентина	6	6	0	38	20	5	24	9	0	96	59	0	1	1	3
Швеция	6	5	1	32	11	3	33	15	2	96	59	0	1	1	3
Сирия	6	6	0	42	16	0	29	8	0	95	61	0	0	2	4
Норвегия	6	5	1	42	4	1	35	12	0	94	62	0	0	2	4

държава	брой			P1	P2	P3	P4	P5	P6	Общо	Място	Награди			
		м	ж									зл.	ср.	бр.	гр.
Белгия	6	6	0	41	10	1	30	10	0	92	63	0	0	2	4
Финландия	6	4	2	36	13	0	24	18	0	91	64	0	1	1	4
Литва	6	6	0	42	3	8	24	14	0	91	64	0	1	1	4
Нова Зеландия	6	5	1	42	9	0	31	9	0	91	64	0	0	1	5
Словения	6	4	2	42	11	0	32	6	0	91	64	0	0	1	5
Мароко	6	5	1	40	11	0	30	2	0	83	68	0	0	1	5
Туркменистан	6	6	0	39	25	1	18	0	0	83	68	0	0	1	4
Шри Ланка	6	6	0	39	6	3	24	8	0	80	70	0	0	1	5
Киргизстан	6	6	0	37	16	1	20	5	0	79	71	0	0	0	6
Колумбия	6	5	1	38	8	0	24	8	0	78	72	0	0	2	3
Таджикистан	6	5	1	32	12	0	29	2	0	75	73	0	0	1	4
Португалия	6	6	0	37	11	1	18	6	0	73	74	0	0	1	4
Тунис	6	6	0	36	15	0	17	4	0	72	75	0	0	1	4
Коста Рика	6	6	0	32	11	0	23	3	0	69	76	0	0	1	4
Ирландия	6	5	1	21	4	0	23	15	0	63	77	0	0	1	2
Исландия	6	6	0	38	1	0	7	12	0	58	78	0	0	1	4
Боливия	6	5	1	17	15	1	16	4	0	53	79	0	0	0	4
Албания	6	5	1	32	10	0	5	1	0	48	80	0	0	0	4
Пакистан	6	6	0	20	10	1	10	1	0	42	81	0	0	1	1
Парагвай	4	3	1	27	1	0	10	3	0	41	82	0	0	0	4
Уругвай	3	3	0	21	3	1	10	2	0	37	83	0	0	0	3

държава	брой			P1	P2	P3	P4	P5	P6	Общо	Място	Награди			
		м	ж									зл.	ср.	бр.	гр.
Обединени арабски емирства	6	3	3	16	7	0	8	5	0	36	84	0	0	1	1
Руанда	6	4	2	24	0	0	11	0	0	35	85	0	0	0	3
Ел Салвадор	3	2	1	21	10	0	4	0	0	35	85	0	0	0	3
Косово	6	6	0	20	6	0	6	2	0	34	87	0	0	0	2
Мианмар	6	5	1	18	1	0	10	3	0	32	88	0	0	0	2
Панама	3	3	0	21	0	0	10	0	0	31	89	0	0	0	3
Еквадор	6	6	0	18	1	0	7	1	0	27	90	0	0	0	1
Оман	6	3	3	10	7	1	7	2	0	27	90	0	0	1	0
Непал	6	5	1	17	0	0	9	0	0	26	92	0	0	0	1
Мавритания	6	6	0	12	7	0	5	0	0	24	93	0	0	0	1
Пуерто Рико	4	2	2	17	2	0	3	2	0	24	93	0	0	0	1
Никарагуа	3	3	0	12	7	0	3	0	0	22	95	0	0	0	2
Чили	3	3	0	16	0	0	2	2	0	20	96	0	0	0	2
Черна гора	4	3	1	12	0	1	1	6	0	20	96	0	0	0	1
Хондурас	2	2	0	9	0	0	8	0	0	17	98	0	0	0	1
Лихтенщайн	2	2	0	14	0	1	0	2	0	17	98	0	0	0	2
Ботсвана	6	4	2	11	0	0	2	2	0	15	100	0	0	0	1
Люксембург	3	0	3	11	0	0	3	0	0	14	101	0	0	0	1
Доминиканска република	6	4	2	9	0	0	3	1	0	13	102	0	0	0	0
Гана	2	2	0	9	0	0	2	1	0	12	103	0	0	0	0

държава	брой			P1	P2	P3	P4	P5	P6	Общо	Място	Награди			
		м	ж									зл.	ср.	бр.	гр.
Куба	2	1	1	9	0	0	0	2	0	11	104	0	0	0	1
Ирак	4	3	1	5	0	0	2	4	0	11	104	0	0	0	0
Венецуела	3	1	2	9	0	0	2	0	0	11	104	0	0	0	1
Буркина Фасо	6	4	2	7	0	0	1	0	0	8	107	0	0	0	0
Уганда	5	4	1	4	0	0	2	1	0	7	108	0	0	0	0
Камерун	6	6	0	6	0	0	0	0	0	6	109	0	0	0	0
Гватемала	2	0	2	4	0	0	1	0	0	5	110	0	0	0	0
Кения	6	6	0	4	0	0	0	0	0	4	111	0	0	0	0
Танзания	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	112	0	0	0	0

З А Д А Ч И

събота, 8 юли 2023 г.

Задача 1. Да се намерят всички съставни числа $n>1$, които удовлетворяват условието: ако $d_1, d_2, \dots, d_k$ са всички положителни делители на n, където $1=d_1<d_2<\dots<d_k=n$, то d_i дели $d_{i+1}+d_{i+2}$ за всяко $1\le i\le k-2$.

(*предложена от Сантяго Родригес от Колумбия*)

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, в който $AB<AC$. Нека Ω е описаната му окръжност и S е средата на дъгата CB, съдържаща върха A. Перпендикулярът от A към BC пресича BS в D и за втори път Ω в $E\ne A$. Правата през D, която е успоредна на BC, пресича правата BE в L. Нека ω е описаната окръжност около триъгълник BDL, която пресича Ω за втори път в $P\ne B$. Да се докаже, че допирателната към ω през P пресича правата BS в точка от вътрешната ъглополовяща на $\angle ABC$.

(*предложена от Tiago Mourão и Nuno Arala от Португалия*)

Задача 3. За всяко естествено число $k\ge 2$ да се намерят всички безкрайни редици от естествени числа $a_1, a_2, \dots$, за които съществува полином $P(x)$ от вида

$$P(x)=x^k+c_{k-1}x^{k-1}+\dots+c_1x+c_0,$$

чиито коефициенти са естествени числа и такъв, че $P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}...a_{n+k}$ за всяко естествено число n.

(*предложена от Ivan Chan от Малайзия*)

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

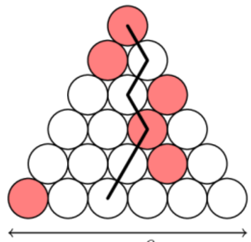
неделя, 9 юли 2023 г.

Задача 4. Нека $x_1, x_2, ..., x_{2023}$ са две по две различни положителни реални числа, такива че числото

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)}$$

е цяло за всяко $n = 1, 2, ..., 2023$. Да се докаже, че $a_{2023} \geq 3034$.

Задача 5. При всяко естествено число n един *японски триъгълник* се състои от $1+2+...+n$ еднакви кръга, подредени във формата на равностранен триъгълник, както е показано. Редовете са номерирани отгоре надолу с числата $i = 1, 2, ..., n$, като i – ият ред е съставен от i кръга, точно един от които е оцветен в червено. *Нинджа-път* в един японски триъгълник е редица от n кръга, която започва от първия ред, преминава последователно през кръг от всеки следващ ред и продължава до последния ред. Всеки кръг от пътя се допира до един от двата кръга, които са непосредствено под него. При n = 6 е даден пример на японски триъгълник с нинджа-път, който съдържа два червени кръга. В зависимост от n да се намери най-голямото k, за което във всеки японски триъгълник с $1+2+...+n$ кръга има нинджа-път с поне k червени кръга.



Задача 6. Даден е равностранен триъгълник ABC. Точките A_1, B_1 и C_1 са вътрешни за триъгълника, така че $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^0$. Нека BC_1 и CB_1 се пресичат в A_2, CA_1 и AC_1 се пресичат в B_2, а AB_1 и BA_1 се пресичат в C_2. Да се докаже, че ако $\Delta A_1B_1C_1$ е разностранен, то описаните окръжности около ΔAA_1A_2, ΔBB_1B_2 и ΔCC_1C_2 имат две общи точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

Р Е Ш Е Н И Я

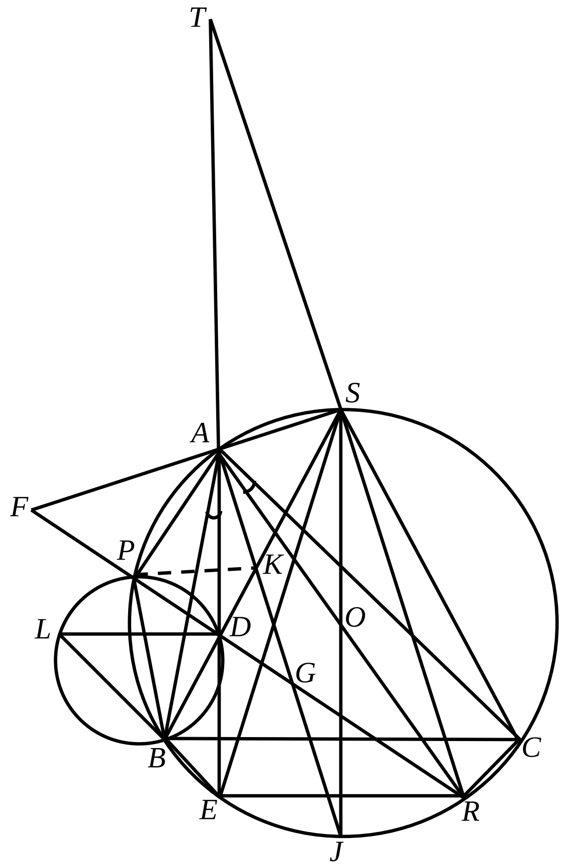
Задача 1. *Първи начин*. Да забележим, че $d_2 = \dfrac{n}{d_{k-1}}$ и $d_3 = \dfrac{n}{d_{k-2}}$, откъдето $d_{k-1} = \dfrac{n}{d_2}$ и $d_{k-2} = \dfrac{n}{d_3}$. От друга страна, от условието $d_i | d_{i+1} + d_{i+2}$ при $i = k-2$ следва, че $d_{k-2} | d_{k-1} + d_k$, т.е. $d_{k-2} | d_{k-1} + n$ и тъй като $d_{k-2} | n$, заключаваме, че $d_{k-2} | d_{k-1}$. Това означава, че $\dfrac{d_{k-1}}{d_{k-2}}$ е цяло число, т.е. числото $\dfrac{n}{d_2}:\dfrac{n}{d_3}=\dfrac{d_3}{d_2}$ е цяло и следователно $d_2\,|\,d_3$. Но по условие $d_2\,|\,d_3+d_4$, откъдето $d_2\,|\,d_4$. По същия начин $d_3\,|\,d_4+d_5$ и заключаваме, че $d_2\,|\,d_5$. По индукция следва, че $d_2\,|\,d_i$ за всяко $i=3, 4,\dots, k$. Можем да считаме, че $d_2=p,$ където p е най-малкият прост делител на n. От направените разглеждания следва, че $n=p^{k-1}$, което е отговорът на задачата.

Втори начин. Нека $p<q$ са двата най-малки прости делителя на n. Тогава $d_{k-1}=\dfrac{n}{p}$ и има две възможности: $p<q<p^2$ или $p<p^2<\ldots<p^s<q<p^{s+1}$ за някое естествено число s. От условието на задачата в първия случай имаме, че $\dfrac{n}{q}\,\Big|\,\dfrac{n}{p}+n$, т.е. $\dfrac{n(1+p)}{p}:\dfrac{n}{q}=\dfrac{q(1+p)}{p}$ е цяло число, което не е възможно, защото p и q са прости числа. Във втория случай от условието на задачата следва, че $\dfrac{n}{q}\,\Big|\,\dfrac{n}{p^s}+\dfrac{n}{p^{s+1}}$, т.е. числото

$$\frac{\dfrac{n}{p^s}+\dfrac{n}{p^{s+1}}}{\dfrac{n}{q}}=\frac{q}{p^s(1+p)}$$

е цяло. Оттук заключаваме, че p дели q, което отново е невъзможно. Получаваме, че n има само един прост делител и следователно $n=p^{k-1}$.

Задача 2. Нека *O* е центърът на описаната окръжност Ω около ΔABC.



Тъй като *S* е среда на дъгата BC, то $BS=CS$ и ΔBCS е равнобедрен. Тогава $\Delta BOS\cong\Delta COS$ по три страни и $\angle BSO=\angle CSO$. В частност $SO\perp BC$. Ако *SO* пресича Ω за втори път в точката *J*, то $BJ=CJ$ и следователно *AJ* е ъглополовяща на $\angle BAC$. Нека $R\in\Omega$ е такава точка, че *AR* е диаметър на Ω. С *F* и *G* означаваме пресечните точки на правата *DR* съответно с правите *AS* и *AJ*. Да забележим, че $\angle RAC=\angle BAE$. Наистина:

$\angle RAC=90^0-\angle ARC=90^0-\angle ABC=\angle BAE.$

Тук използвахме, че $\angle ARC$ и $\angle ABC$ се измерват с една и съща дъга от Ω и $\angle BAE=90^0-\angle ABC$, защото $AE\perp BC$. Окончателно $\angle RAC=\angle BAE$. Оттук следва, че *AG* е ъглополовяща на $\angle DAR$. Съгласно построенията точките *F, D, G* и *R* лежат на една права. Ще докажем, че и точката *P* лежи на тази права. За целта е достатъчно да проверим, че $\angle APR = 90^0$, защото *AR* е диаметър. Имаме:

$$\angle APR = \angle APB - \angle BPD = \angle APB - \angle EAC = (180^0 - \angle BCA) - (90^0 - \angle BCA) = 90^0 .$$

По-нататък да забележим, че $AJ \| SR$. Това следва от факта, че $AS = JR$, защото $AS = EJ = JR$ (правите *AE* и *SJ* са успоредни и $\angle ESJ = \angle JSR$). Нека правата *RS* пресича правата *AE* в точка *T*. Тъй като ΔERT е правоъгълен и $ES = RS$, то ES е медиана в триъгълника (обратна теорема за медианата към хипотенузата в правоъгълен триъгълник). Заключаваме, че $RS = ST$ и следователно *DS* е медиана в ΔDRT. Но $AJ \| SR$, откъдето следва, че *DK* е медиана в ΔDGA. В частност $AK = KG$ и тъй като ΔPGA е правоъгълен, то $PK = AK$. Накрая ще използваме, че $\Delta DKA \sim \Delta BKA$ ($\angle BKA$ е общ и $\angle DAK = \angle BAK$). Оттук $\frac{AK}{BK} = \frac{DK}{AK}$ и $AK^2 = DK.BK$, т.е. $PK^2 = KD.KB$, което е достатъчно да твърдим, че *PK* е допирателна към ω.

Задача 3. Константната редица $a_n = a$ за всяко естествено число *n*, където *a* е естествено число, е решение на задачата. За нея при произволно $k \geq 2$ полиномът $P(x) = x^k$ удовлетворява условието на задачата. Наистина

$$P(a_n) = P(a) = a^k = \underbrace{aa...a}_{k} = a_{n+1}a_{n+2}...a_{n+k} \text{ за всяко естествено число } n.$$

За да определим всички редици, които отговарят на полинома $P(x) = x^k$ при фиксирано *k*, ще докажем, че константната редица е единствена. Да фиксираме $k \geq 2$ и нека $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ е редица от естествени числа, за която $a_m^k = P(a_m) = a_{m+1}a_{m+2}...a_{m+k}$ за всяко естествено число *m*. Нека *n* е най-малкият индекс, за който a_n е най-малкият член на разглежданата редица $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$. Най-малък член съществува, защото редицата е съставена от естествени числа, което означава, че е ограничена отдолу и е достатъчно да приложим принципа за непрекъснатост. Тогава $a_n^k = P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}...a_{n+k}$, т.е. $a_n^k = a_{n+1}a_{n+2}...a_{n+k}$, което е възможно само ако $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = a_{n+k} = a_n$, защото всичките числа $a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{n+k}$ не са по-малки от a_n. В частност $a_{n+1} = a_n$. Ще докажем по индукция, че $a_m = a_n$ за всяко $m > n$. При $m = n+1$ твърдението е изпълнено. Да допуснем, че $a_{n+2} = a_{n+3} = ... = a_{n+m} = a_n$ за някое естествено число $m \geq 2$. Ще проверим, че $a_{n+m+1} = a_n$. Имаме $a_n^k = a_{n+m}^k = P(a_{n+m}) = a_{n+m+1}a_{n+m+2}...a_{n+m+k}$, т.е. $a_n^k = a_{n+m+1}a_{n+m+2}...a_{n+m+k}$ и тъй като множителите вдясно са *k* на брой и всеки от тях е не по-малък от a_n, то $a_{n+m+1} = a_{n+m+2} = ... = a_{n+m+k} = a_n$. В частност $a_{n+m+1} = a_n$, което трябваше да се докаже. Ако

$n=1$, заключаваме, че редицата $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ е константна и всички нейни членове са равни на a_1. Сега обратно, ще докажем, че $a_m = a_n$ за всяко $m < n$. Ще използваме отново индукция. Най-напред ще проверим, че ако $n \geq 2$, то $a_{n-1} = a_n$. Имаме $a_{n-1}^k = P(a_{n-1}) = a_n a_{n+1} \dots a_{n+k-1} = a_n^k$ според доказаното. Оттук $a_{n-1}^k = a_n^k$, т.е. $a_{n-1} = a_n$. Както по-горе по индукция следва, че наистина $a_m = a_n$ за всяко $m < n$. Окончателно редицата $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ е константна.

Да разгледаме безкрайна аритметична прогресия от естествени числа с разлика d. Ще докажем, че такава прогресия, т.е. че редицата $\{a_m\}_{m=1}^{m=\infty}$, където $a_m = a_{m-1} + d = a + (m-1)d$ и a, d са естествени числа, е решение на задачата. За нея при произволно $k \geq 2$ полиномът $P(x) = (x+d)(x+2d)\dots(x+kd)$ удовлетворява условието на задачата. Наистина, при фиксирано k за произволен член a_m на прогресията имаме:

$$P(a_m) = P(a+(m-1)d) = (a+md)(a+(m+1)d)\dots(a+(m+k-1)d) = a_{m+1}a_{m+2}\dots a_{m+k}\,.$$

Пристъпваме към общия случай. Нека $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ е редица от естествени числа, за която съществува полином $P(x)$ от степен $k \geq 2$ със старши коефициент 1 и коефициенти, които са естествени числа, така че $P(a_m) = a_{m+1}a_{m+2}\dots a_{m+k}$ за всяко естествено число m. Фиксираме k в разсъжденията по-долу

Лема1. Редицата $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ е растяща.

Доказателство: Достатъчно е да докажем, че всяко $i \geq 1$ членът a_i не надминава никой от членовете на подредицата $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$. Да допуснем противното, т.е. съществува $j > i$, така че a_j е най-малкият член на подредицата. Както и по-горе, той съществува и ще считаме, че j е най-малкият индекс с това свойство. Но тогава $a_{j-1} \geq a_j$ и следователно $P(a_{j-1}) \geq P(a_j)$, защото полиномът $P(x)$ е растяща функция (коефициентите му са естествени числа и следователно са положителни). От друга страна $P(a_{j-1}) = a_j a_{j+1} \dots a_{j+k-1}$ и $P(a_j) = a_{j+1}a_{j+2}\dots a_{j+k}$, откъдето $a_j \geq a_{j+k}$, което противоречи на избора на a_j.

Лема 2. Съществува положителна константа M, така че $P(x) < (x+M)^k$ за всяко x.

Доказателство: Нека $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0$. От биномната формула следва, че
$$(x+M)^k = x^k + M\binom{k}{1}x^{k-1} + M^2\binom{k}{2}x^{k-2} + M^{k-1}\binom{k}{k-1}x + M^k$$

Нека

$$M > \max\left\{\frac{c_{k-1}}{\binom{k}{1}},\ \sqrt{\frac{c_{k-2}}{\binom{k}{2}}},\ \sqrt[3]{\frac{c_{k-3}}{\binom{k}{3}}}\ldots,\ \sqrt[k-1]{\frac{c_1}{\binom{k}{k-1}}},\ \sqrt[k]{c_0}\right\}$$

Тогава $M > \frac{c_{k-1}}{\binom{k}{1}}$, $M^2 > \frac{c_{k-2}}{\binom{k}{2}}$, $M^3 > \frac{c_{k-3}}{\binom{k}{3}}$, …, $M^{k-1} > \frac{c_1}{\binom{k}{k-1}}$, $M^k > c_0$ и следователно коефициентите пред последователните степени на x в развитието на $\left(x+M\right)^k$ са по-големи от коефициентите пред последователните степени на x на $P(x)$. Така наистина $P(x) < \left(x+M\right)^k$ за избраната константа M.

Лема 3. Редицата $\left\{a_{m+1} - a_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ е ограничена.

Доказателство: Нека m е произволно естествено число. Тъй като редицата $\left\{a_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ е растяща съгласно Лема 1, то $a_{m+1}^k \le a_{m+1}a_{m+2}...a_{m+k}$. От друга страна $P(a_m) = a_{m+1}a_{m+2}...a_{m+k}$ и $P(a_m) < (a_m + M)^k$ съгласно Лема 2. Заключаваме, че $a_{m+1}^k < (a_m + M)^k$, откъдето $a_{m+1} < a_m + M$ и следователно $a_{m+1} - a_m < M$.

Лема 4. Редицата $\left\{a_{m+k+1} - a_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ е ограничена.

Доказателство: Тъй като

$$a_{m+k+1} - a_m = a_{m+k+1} - a_m + a_{m+k} - a_{m+k} = (a_{m+k+1} - a_{m+k}) + (a_{m+k} - a_m),$$

от Лема 3 следва, че $a_{m+k+1} - a_m < M + M = 2M$

По-нататък нека за всяко естествено m да дефинираме крайната редица $d_1, d_2, \ldots, d_{k+1}$ с дължина $k+1$, така че $a_{m+1} - a_m = d_1$, $a_{m+2} - a_m = d_2$, …, $a_{m+k+1} - a_m = d_{k+1}$. От Лема 1 следва, че тази редица е растяща и $d_1 \ge 0$. Разбира се, членовете ѝ зависят от m, но като използваме Лема 4, можем да отбележим важното заключение, че елементите на $(k+1)-$орката $(d_1, d_2, ..., d_{k+1})$ не надминават подходящо избрано естествено число N независимо от m. Тъй като елементите на всяка една такава $(k+1)-$орка се намират в интервала $[0; N]$, техният брой е краен (той не надминава броя на комбинациите от N елемента от клас k + 1. Това означава, че съществува $(k+1)-$орка $(d_1, d_2, ..., d_{k+1})$, която се среща безброй много пъти, т.е. за безброй много стойности на m съответната $(k+1)-$орка е една и съща. В разглежданията по-долу ще считаме, че $(d_1, d_2, ..., d_{k+1})$ е именно такава $(k+1)-$орка.

Нека m е такова, че съответната $(k+1)-$орка $(d_1, d_2, ..., d_{k+1})$ се среща безброй много пъти. Във връзка с крайния резултат е удобно да предположим, че m е най-малкото естествено число с това свойство. Имаме

$$P(a_m) = a_{m+1}a_{m+2}...a_{m+k} = (a_m + d_1)(a_m + d_2)...(a_m + d_k).$$

Това означава, че равенството $P(x) = (x + d_1)(x + d_2)...(x + d_k)$ се удовлетворява за безброй много стойности на *x*, именно за всички a_m с индекс *m*, за който разглежданата $(k+1)-$орка $(d_1, d_2, ..., d_{k+1})$ се среща безброй много пъти. Оттук заключаваме, че полиномът $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + ... + c_1x + c_0$ има вида $P(x) = (x + d_1)(x + d_2)...(x + d_k)$ за всяко *x*. Корените на уравнението $P(x) = 0$ са $-d_1, -d_2, ..., -d_k$. В същото време

$$P(x + d_1) = (x + d_1 + d_1)(x + d_1 + d_2)...(x + d_1 + d_k)$$

и корените на уравнението $P(x + d_1) = 0$ са $-d_1 - d_1, -d_2 - d_1, ..., -d_k - d_1$. От друга страна

$$P(a_m + d_1) = P(a_{m+1}) = a_{m+2}a_{m+3}...a_{m+k+1} = (a_m + d_2)(a_m + d_3)...(a_m + d_{k+1})$$

и следователно равенството $P(x + d_1) = (x + d_2)(x + d_3)...(x + d_{k+1})$ се удовлетворява, както по-горе, за безброй много стойности на *x*. Заключаваме, че полиномът $P(x + d_1)$ има вида $P(x + d_1) = (x + d_2)(x + d_3)...(x + d_{k+1})$, а корените на уравнението $P(x + d_1) = 0$ са $-d_2, -d_3, ..., -d_{k+1}$. По-горе беше отбелязано, че редицата $d_1, d_2, ..., d_{k+1}$ е растяща. Тогава $-d_1 - d_1 \geq -d_2 - d_1 \geq ... \geq -d_k - d_1$ и $-d_2 \geq -d_3 \geq ... \geq -d_{k+1}$. Тъй като става дума за едни и същи корени, подредени в един и същи ред, заключаваме, че

$$-d_1 - d_1 = -d_2, \; -d_2 - d_1 = -d_3, \; \dots, \; -d_k - d_1 = -d_{k+1}.$$

Оттук $d_2 = 2d_1$, $d_3 = d_2 + d_1 = 2d_1 + d_1 = 3d_1$, $\dots$, $d_{k+1} = d_k + d_1 = kd_1 + d_1 = (k+1)d_1$. Ако $d_1 = d$, то по-горе беше отбелязано, че $d_1 \geq 0$ и следователно $d \geq 0$. Получихме, че редицата $d_1, d_2, ..., d_{k+1}$ е аритметична прогресия с разлика *d*. Освен това $P(x) = (x + d)(x + 2d)...(x + kd)$ п членовете на редицата $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ от a_m до a_{m+k+1}за всеки индекс *m*, за който съответната му $(k+1)-$орка $(d_1, d_2, ..., d_{k+1})$ е една и съща (при това тези индекси са безброй много), също образуват аритметична прогресия с разлика *d*. Остава да покажем, че цялата редица $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ е аритметична прогресия със същата разлика, а не само части от нея (макар и безброй много). Нека a_m е произволен член на редицата. Тогава $P(a_m) = a_{m+1}a_{m+2}...a_{m+k}$, откъдето

$$a_{m+k+2} = \frac{P(a_{m+2})}{a_{m+3}a_{m+4}...a_{m+k+1}} = \frac{(a_{m+2} + d)(a_{m+2} + 2d)...(a_{m+2} + kd)}{(a_{m+2} + d)(a_{m+2} + 2d)...(a_{m+2} + (k-1)d)} =$$

$$= a_{m+2} + kd = a_m + 2d + kd = a_m + (k+2)d\text{'}$$

т.е. $a_{m+k+2} = a_m + (k+2)d$. Заключаваме, че a_{m+k+2} е следващ член на разглежданата аритметична прогресия. Следователно за всички естествени числа, надясно от *m* редицата $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ е аритметична прогресия с разлика *d*. Ще разгледаме случая, когато естествените числа са наляво от m. Нека $a_m^* = a_m - d$. Като използваме, че $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)...(x+d_k)$ за всяко x, получаваме

$$P(a_m^*) = (a_m^* + d)(a_m^* + 2d)...(a_m^* + kd) = a_m(a_m + d)...(a_m + (k-1)d) = a_m a_{m+1}...a_{m+k-1} = P(a_{m-1}),$$

т.е. $P(a_m - d) = P(a_{m-1})$. Както беше отбелязано, $P(x)$ е растяща функция и следователно е инективна, откъдето $a_{m-1} = a_m - d$. Това означава, че a_{m-1} е член на разглежданата аритметична прогресия. По индукция следва, че всички членове на редицата $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ реди m също са членове на тази прогресия. С това решението на Задача 3 е завършено.

Задача 4. Да забележим, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{2023}$ е строго растяща, защото числата x_i са положителни. Тогава естественият въпрос е каква е разликата между последователните членове на редицата (те са естествени числа). Ще проверим, че последователните членове на редицата не са последователни в естествения ред на естествените числа. Достатъчно е да докажем, че за всяко естествено число n е изпълнено $a_{n+2} \geq a_n + 3$. В противен случай $a_{n+2} \leq a_n + 2$. Последното е възможно само ако $a_{n+2} = a_n + 2$ и $a_{n+1} = a_n + 1$.

Нека n е произволно естествено число, $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ и $h_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$.

Тогава

$$a_{n+1}^2 = s_{n+1}h_{n+1} = (s_n + x_{n+1})\left(h_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right) = s_n h_n + \left(\frac{s_n}{x_{n+1}} + x_{n+1}h_n\right) + 1 = a_n^2 + \left(\frac{s_n}{x_{n+1}} + x_{n+1}h_n\right) + 1.$$

Ако $a_n = k$, където k е естествено число, то за да бъде изпълнено $a_{n+1} = k+1$, трябва $\frac{s_n}{x_{n+1}} + x_{n+1}h_n = 2k$. Но от неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва, че

$$\frac{s_n}{x_{n+1}} + x_{n+1}h_n \geq 2\sqrt{s_n h_n} = 2a_n = 2k,$$

откъдето $a_{n+1}^2 \geq a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2$. Следователно $a_{n+1} \geq a_n + 1 = k + 1$. Равенството $a_{n+1} = k + 1$ е изпълнено тогава и само тогава, когато има равенство между средното аритметично и средното геометрично, т.е. когато $\frac{s_n}{x_{n+1}} = x_{n+1}h_n$. Оттук $x_{n+1}^2 = \frac{s_n}{h_n}$. По същия начин $x_{n+2} = k + 2$ тогава и само тогава, когато $x_{n+2}^2 = \frac{s_{n+1}}{h_{n+1}}$. Но тогава

$$x_{n+2}^2 = \frac{s_{n+1}}{h_{n+1}} = \frac{s_n + x_{n+1}}{h_n + \frac{1}{x_{n+1}}} = \frac{s_n + \sqrt{\frac{s_n}{h_n}}}{h_n + \sqrt{\frac{h_n}{s_n}}} = \frac{s_n}{h_n} = x_{n+1}^2.$$

Получаваме, че $x_{n+2}^2 = x_{n+1}^2$, откъдето $x_{n+2} = x_{n+1}$. Последното е невъзможно, защото по условие $x_1, x_2, ..., x_{2023}$ са две по две различни положителни реални числа.

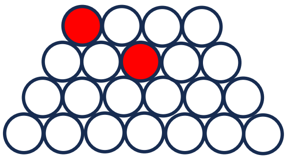
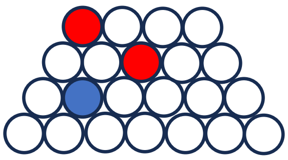
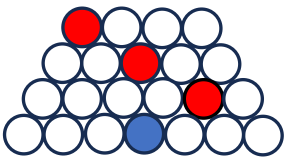
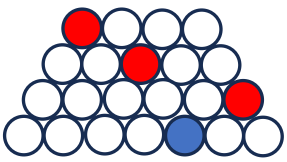
По-нататък имаме $a_1 = 1$ и от доказаното неравенство последователно следва, че $a_3 \geq a_1 + 3 = 1 + 3 = 4 = 3.1 + 1, a_5 \geq a_3 + 3 \geq 4 + 3 = 7 = 3.2 + 1$ и по индукция, ако $a_{2n+1} \geq 3n + 1,$ то $a_{2(n+1)+1} \geq a_{2n+1} \geq 3n + 1 + 3 = 3(n+1) + 1$, т.е. $a_{2n+1} \geq 3n + 1$ за всяко n. Заключаваме, че $a_{2023} = a_{2.1011+1} \geq 3.1011 + 1 = 3033 + 1 = 3034$, което трябваше да се докаже.

Задача 5. Да номерираме кръговете в $i-$ия ред отляво надясно с числата 1, 2, …, i и да означим с $k_{i,j}$ кръга, който се намира в $i-$ия ред на $j-$то място. Съгласно условието на задачата е в сила следната:

Лема 1. От кръг $k_{i,j}$ в нинджа-път се отива в кръга $k_{i+1,i}$ или в кръга $k_{i+1,i+1}$.

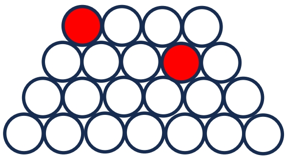
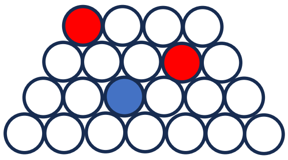
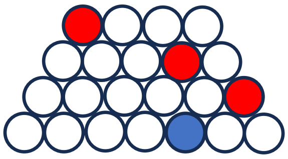
Ще разгледаме оцветявания, които са **неблагоприятни** от гледна точка на целта червените кръгове в нинджа-път да са възможно най-много. Нека кръгът $k_{i,1}$ е червен. От Лема 1 следва, че от него **не може** да се отиде в червен кръг от следващия ред на нинджа-път, ако червеният кръг в $(i+1)-$ия ред е $k_{i+1,3}$, $k_{i+1,4}$ или $k_{i+1,5}$ (вж. първия чертеж), т.е. когато номерът на кръга в следващия ред е с 2 по-голям от номера на кръга в разглеждания ред. По отношение на кръговете $k_{i+1,3}$, $k_{i+1,4}$ и $k_{i+1,5}$ са възможни следните 3 случая:

Случай 1. Кръгът $k_{i+1,3}$ е червен. Интересуваме се от следващия ред, т.е. от ред с номер $i+2$. Ако някой от кръговете с номера 1 и 2 от този ред е червен, до него може да се достигне от $k_{i,1}$ (вж. например кръг $k_{i+2,2}$ от втория чертеж), макар че съответният нинджа-път няма да съдържа $k_{i+1,3}$. До кръгове $k_{i+2,3}$ и $k_{i+2,4}$ може да се стигне от $k_{i+1,3}$ съгласно Лема 1. Остава да видим какво се случва с кръговете $k_{i+2,5}$ и $k_{i+2,6}$ (вж. съответно третия и четвъртия чертеж). От третия чертеж се вижда, че ако червеният кръг е $k_{i+2,5}$, то с изключение на кръг $k_{i+3,7}$ до останалите кръгове от $(i+3)-$ия ред може да се стигне от $k_{i,1}$, $k_{i+1,3}$ или $k_{i+2,5}$(вж. например $k_{i+3,4}$). От четвъртия чертеж става ясно, че ако червеният кръг е $k_{i+2,6}$, то всички кръгове от $(i+3)-$ия ред могат да бъдат достигнати (вж. например $k_{i+3,5}$). В заключение за случай 1 получаваме, че най-неблагоприятно е подреждането от първия чертеж на **Резултат**. Само при това подреждане частта от всеки нинджа-път през разглежданите четири реда минава през не повече от един червен кръг.

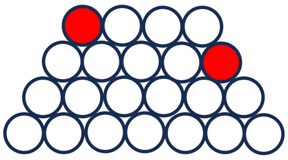
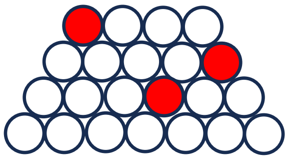





Случай 2. Кръгът $k_{i+1,4}$ е червен (вж. първия чертеж). С разсъждения, подобни на горните, получаваме, че единственият кръг от $(i+2)-$ия ред, който не може да бъде достигнат от предните редове, е $k_{i+2,6}$ (вж. например $k_{i+2,3}$, който може да бъде достигнат

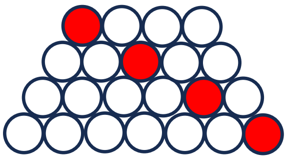
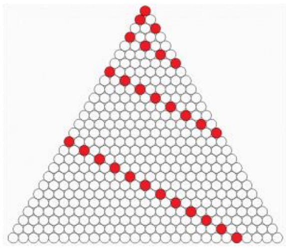
от първия ред). Затова разглеждаме само $k_{i+2,6}$ (вж. третия чертеж). Но тогава всички кръгове от $(i+3)-$ия ред могат да бъдат достигнати (вж. например $k_{i+3,5}$, който може да се достигне от втория ред, кръговете вляво от него могат да се достигнат от първия ред, а кръговете вдясно от него могат да се достигнат от предния ред). В заключение на случай 2 получаваме, че частта от произволен нинджа-път през разглежданите четири реда минава през не по-малко от два червени кръга.

Случай 3. Кръгът $k_{i+1,5}$ е червен (вж. първия чертеж). Сега единственият кръг от $(i+2)-$ия ред, който не може да бъде достигнат от предните редове, е $k_{i+2,4}$ (вж. втория чертеж). Но тогава всички кръгове от $(i+3)-$ия ред могат да бъдат достигнати. Да обърнем внимание, че до същия извод може да се стигне и без разсъждения за $(i+2)-$ия ред. Както в предния случай заключението за случай 3 е, че частта от произволен нинджа-път през разглежданите четири реда минава през не по-малко от два червени кръга.

Резултат.

И така, **най-неблагоприятно** е оцветяването, при което червените кръгове се редуват по диагонал, както е показано на първия чертеж в **Резултат**. Ако оцветяването е отляво надясно, то продължава до дясната страна на триъгълника. Следващият червен кръг трябва да е първият от следващия ред, като червените кръгове отново следва да се редуват по диагонал отляво надясно до достигане на дясната страна на триъгълника. Да отбележим, че в разглежданите по-горе четири реда оцветяването е отляво надясно, защото кръгът $k_{i,1}$ е червен. Движейки се нагоре в японския триъгълник, заключаваме, че със сигурност кръгът $k_{2,1}$ е червен и именно този факт води до оцветяване отляво надясно. В противен случай, т.е. когато червеният кръг от втория ред е $k_{2,2}$, то оцветяването трябва да е отдясно наляво, за да достигнем най-неблагоприятната ситуация с не повече от един червен кръг във всеки ред. Първоначалната част на описаната процедура в случая на оцветяване отляво надясно е представена на втория чертеж в **Резултат**.

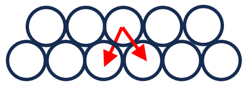
Съгласно направените заключения най-неблагоприятното оцветяване на един японски триъгълник може да се раздели на блокове. Във всеки блок се тръгва от червен кръг най-вляво в първия ред на блока и при оцветяване отляво надясно се стига до дясната страна на триъгълника. При оцветяване отдясно наляво се тръгва от червен кръг най-вдясно в първия ред на блока и се стига до лявата страна на триъгълника. Блоковете са показани на чертежа по-долу с участието на 15 реда и оцветяване отляво надясно.

Блок	Номер на реда	Номер на червения кръг в реда
Блок 1	1	1
Блок 2	**2**	**1**
Блок 2	**3**	**3**
Блок 3	4	1
Блок 3	5	3
Блок 3	6	5
Блок 3	7	7
Блок 4	**8**	**1**
Блок 4	**9**	**3**
Блок 4	**10**	**5**
Блок 4	**11**	**7**
Блок 4	**12**	**9**
Блок 4	**13**	**11**
Блок 4	**14**	**13**
Блок 4	**15**	**15**

При такова възможно **най-неблагоприятно** оцветяване броят на червените кръгове в Блок 1 е 1, защото има само един ред; в Блок 2 той е 2, защото редовете са два; в Блок 3 броят е 4, защото редовете в този блок са четири; в Блок 4 той е 8, защото редовете са осем. От таблицата се вижда, че броят на червените кръгове във всеки блок се определя от номера на реда, от който съответният блок започва. Да забележим, че този номер е степен на 2, като се тръгва от $2^0 = 1$ и последователно се преминава през $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ и т.н. Освен това забелязваме, че поредността на блоковете се определя от съответната степен на двойката, намалена с 1. Ако номерът на блока, съдържащ най-горния кръг, е 0, то блокът с № 1 е с 2 реда и на него отговаря 2^1, блокът с № 2 е с 4 реда и на него отговаря 2^2 и т.н. Това означава, че при $n=1$ броят на блоковете е равен на 1, което е $0+1=\log_2 1+1$. При $n=2$ броят на блоковете е равен на 2, което е $1+1=\log_2 2+1$. При $n=3$ броят на блоковете се запазва 2 и за да изразим, че той зависи от *n*, този брой може да се запише във вида $\lfloor \log_2 3 \rfloor + 1$ (тук използваме означението $\lfloor a \rfloor$ за цялата част на *a*, като в конкретния случай $\lfloor \log_2 3 \rfloor = 1$). При $n=4$ броят на блоковете е 3, което е $2+1=\log_2 4+1=\lfloor \log_2 4 \rfloor+1$. При $n=5$, $n=6$ и $n=7$ броят на блоковете се запазва 3 и за да изразим, че той зависи от *n*, този брой може да се запише съответно във вида $\lfloor \log_2 5 \rfloor+1=2+1=3$, $\lfloor \log_2 6 \rfloor+1=2+1=3$ и $\lfloor \log_2 7 \rfloor+1=2+1=3$. По същия начин може да се разсъждава и за Блок 4. Така стигаме до извода, че за произволно *n* броят на блоковете е $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Тъй като в най-неблагоприятния случай, който разглеждаме, в един нинджа-път има не повече от един червен кръг във всеки блок, то можем да твърдим, че отговорът на задача е $\le \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

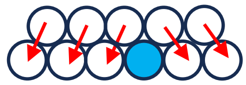
Сега да фиксираме един японски триъгълник, т.е. да фиксираме *n*. Да разгледаме кръг $k_{i,j}$ в този японски триъгълникнего и да означим с $m_{i,j}$ максималния брой червени кръгове, които един нинджа-път може да съдържа в частта си от $k_{i,j}$ включително до долната страна на триъгълника. С помощта на Лема 1 заключаваме, че е в сила следната:

Лема 2. $m_{i,j} = \max\{m_{i+1,j}, m_{i+1,j+1}\} + \begin{cases} 1, & \text{ако } k_{i.j} \text{ е червен} \\ 0, & \text{ако } k_{i.j} \text{ не е червен} \end{cases}$.



Нека $S(i) = 2^{m_{i,1}} + 2^{m_{i,2}} + \ldots + 2^{m_{i,i}}$. Тогава

Лема 3. $S(i) \ge S(i+1)$ за всяко i.



Доказателство: Тъй като показателната функция при основа 2 е растяща, то от Лема 2 следва, че $2^{m_{i,j}} \ge 2^{m_{i+1,j}}, 2^{m_{i+1,j+1}}$. Нека $m_{i+1,m} = \min_j \{m_{i+1,j}\}$, т.е. избираме такъв номер *m*, че $m_{i+1,m}$ е най-малкото измежду всички $m_{i+1,j}$ от $(i+1)-$ия ред (вж. затъмнения кръг). Събираемите в $S(i)$ са с едно по-малко от тези в $S(i+1)$. На всеки кръг от $i-$ия ред съпоставяме кръг от $(i+1)-$ия ред по показания със стрелки начин. От Лема 2 следва, че $S(i) \ge S(i+1) - 2^{m_{i+1,m}}$. Това неравенство е в сила и без да отчитаме, че един от кръговете в $i-$ия ред е червен. Сега ще подобрим неравенството, като използваме именно този факт. Нека кръгът $k_{i,r}$ е червен. Тогава

$$S(i+1) - 2^{m_{i+1,m}} = (2^{m_{i+1,1}} + \ldots + 2^{m_{i+1,r}+1} + \ldots + 2^{m_{i+1,i+1}}) - 2^{m_{i+1,m}} =$$

$$= (2^{m_{i+1,1}} + \ldots + 2.2^{m_{i+1,r}} + \ldots + 2^{m_{i+1,i+1}}) - 2^{m_{i+1,m}} = 2^{m_{i+1,1}} + \ldots + 2^{m_{i+1,r}} + \ldots + 2^{m_{i+1,i+1}},$$

защото $2^{m_{i+1,r}} \ge 2^{m_{i+1,m}}$ и $m_{i+1,m}$ е най-малкото. С това Лема 3 е доказана.

Лема 4. $S(n) = n+1$.

Доказателство: Тъй като $n-$ият ред е последен, то числата $m_{n,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ са равни на нула с изключение на едно, което отговаря на червен кръг и е равно на 1. Тогава $S(n) = 2^{m_{n,1}} + 2^{m_{n,2}} + \ldots + 2^{m,n} = 2^0 + 2^0 + \ldots + 2^1 + \ldots + 2^0 = n - 1 + 2 = n+1$.

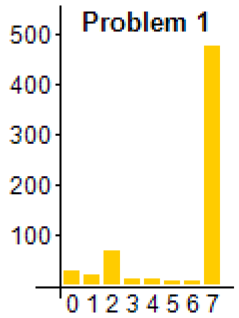
Окончателно от Лема 3 имаме $S(1) \ge S(2) \ge \ldots \ge S(n) = n+1$, т.е. $S(1) \ge n+1$ и $2^{m_{1,1}} \ge n+1$. Като логаритмуваме при основа 2, получаваме $m_{1,1} \ge \log_2(n+1)$. Това означава, че отговорът на задачата е $\ge \log_2(n+1)$. Но по-горе показахме, че отговорът е $\le \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Тъй като $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \le \log_2(n+1)$ за всяко *n*, то

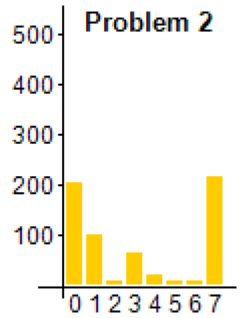
$$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \le \text{отговор на задачата} \le \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

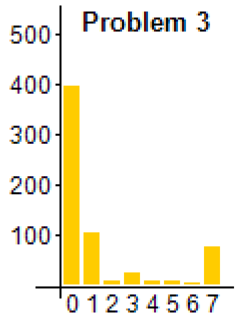
и следователно отговорът на задачата е $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

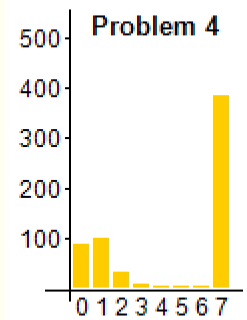
Задача 6. На тази задача е посветена отделна статия, която ще бъде публикувана в следващия брой на списанието.

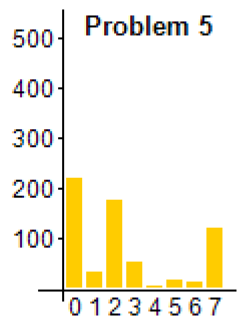
Предлагаме официалната статистика за представянето на участниците в олимпиадата по всяка от шестте задачи от темата. Върху абсцисната ос са нанесени възможните резултати от 0 до 7 точки включително, а върху ординатната ос – броят на учениците със съответния точков резултат. Данните от графиките са уточнени в таблицата.

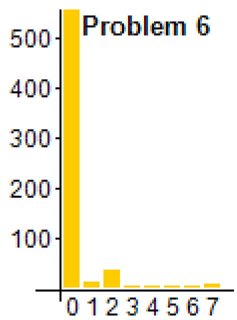












	Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**
среден брой точки	5,845	3,162	1,256	4,717	2,417	0,275
точки	**Задача 1**	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**
0	26	202	396	86	219	555
1	19	100	102	100	29	11
2	67	6	7	32	174	36
3	9	62	23	8	52	4
4	9	20	8	4	4	1
5	6	7	6	1	13	1
6	8	6	3	3	9	4
7	474	215	73	384	118	6
	618	**618**	**618**	**618**	**618**	**618**

Следващата 65. Международна олимпиада по математика ще се проведе от 10 до 22 юли 2024 г. в гр. Бат, Великобритания.