МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА' 2024

Д-р М. Плюс

Поредната 65. международна олимпиада по математика се проведе в гр. Бат, Великобритания от 11 до 22 юли 20243 г. В нея взеха участие 609 ученици, от които 81 девойки. Представиха се общо 108 държави. Рекордът за броя на държаните-участнички е 112, поставен през 2019 г. отново в гр. Бат. По регламент, приблизително половината състезатели получиха медали в отношение 1:2:3 (също приблизително) на златните, сребърните и бронзовите. Журито на олимпиадата разпредели общо 326 медала, от които 58 златни с долна граница 29 точки вкл., 123 сребърни с граници от 22 до 28 точки вкл. и 145 бронзови с граници от 16 до 21 точки вкл. Бяха присъдени и 170 почетни отличия за учениците извън медалистите с поне една пълно решена задача.

Българският отбор заслужи 3 сребърни и 2 бронзови медала, с което в отборното класиране се наредихме на 27-28. място. Това е сериозно отстъпление, но е в рамките на очакванията и затвърждава тенденцията за последните повече от 15 години България да е извън групата на водещите държави. А това са "четирите големи": Китай, САЩ, Русия и Южна Корея. По данни от официалния сайт на международната олимпиада, 9 пъти за последните 24 години от 2000 г. насам точно тези държави са заемали първите четири места. (Тук следва да се отбележи, че Русия не беше допусната до участие на тази олимпиада, както и на миналогодишните две в Осло и в гр. Чиба (Япония).) Останалите държави са се появявали епизодично в първата четворка. На челно място между тях е България (шесто място, вж. таблицата по-долу), но както беше споменато, това се е случвало преди повече от 15 години. Пораженията, нанесени от бившия ДС активист Кадмий и доказан доносник ПеКе, както и от джуджето-директор ПеБо, продължават да тежат. Едва ли ще се повтори или поне ще се доближи българският триумф през 2003 г., когато на Международната олимпиада в Япония спечелихме отборното класиране и шестимата наши представители завоюваха златни отличия. Поне засега не ни остава нищо друго освен да споменаваме с гордост това забележително постижение и да мечтаем. За съжаление, настроението ни е песимистично! Погледнете темите на български език от тазгодишната олимпиада. Не тези, които са публикувани по-долу, а които са преведени от българските ръководители и са раздадени на нашите ученици. В преводите от английски на български са допуснати правописни и граматически грешки. Още не си научил български език, а си тръгнал да решаваш задачи, а и да преподаваш на подрастващите! Няма как да чакаш успех!

Индивидуален победител в тазгодишната олимпиада е китайският ученик Haojia Shi, който единствен постигна максималните 42 точки. Както често се случва (и такава е политиката на международното жури), най-лесна беше задача 1, която е решена напълно от 413 участници. Най-трудни са задача 3 и задача 6, средните оценки върху които на всички участници са съответно 0,437 точки и 0,396 точки от възможните 7 точки. Общо 21 участници са с 0 точки върху темата. По-долу са резултатите на нашите състезатели. Предлагаме ви и класирането по държави, в което България заедно с Гърция е на 27-28 място с общо 126 спечелени точки от 252 възможни (50%).

Място	Държава	Класирания на първо място	Класирания на второ място	Класирания на трето място	Класирания на четвърто място	Брой призови класирания
1	Китай	17	6	2		25
2	САЩ	5	6	9	2	22
3	Русия	1	9	3	4	17
4	Ю. Корея	2	3	7	6	18
5	Виетнам			2	3	5
6	България	1			2	3
7	Сингапур			1	1	2
8	С. Корея				2	2
9	Япония		1			1
10	Тайван			1		1
11	Германия				1	1
12	Индия				1	1
13	Иран				1	1
14	Румъния				1	1
15	Украйна				1	1

65. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2024 Г.
КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ

Състезател	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	Общо	Място		Награда
								Абсолютно класиране	Резултат в %	
Марин Христов	7	7	2	7	1	1	25	90-99	59,52%	Сребърен медал
Ангел Христов	7	2	0	7	7	1	24	100-124	57,14%	Сребърен медал
Биляна Димитрова	7	2	1	7	7	0	24	100-124	57,14%	Сребърен медал
Веселин Маркович	7	2	1	7	3	0	20	216-226	47,62%	Бронзов медал
Борис Гачевски	7	2	0	7	1	1	18	238-251	42,86%	Бронзов медал
Виктор Костадинов	7	0	0	7	1	0	15	327-365	35,71%	Почетна грамота
ОБЩО	42	15	4	42	20	3	126	27-28	50%	

65. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2024 Г.
КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ ПО ДЪРЖАВИ

място	държава	брой			31	32	33	34	35	36	общо	медали			
			М	Ж								З	С	Б	Г
1	САЩ	6	5	1	42	41	19	40	35	15	192	5	1	0	0
2	Китай	6	6	0	42	42	31	40	22	13	190	5	1	0	0
3	Южна Корея	6	6	0	42	37	18	42	7	22	168	2	4	0	0
4	Индия	6	6	0	42	34	11	42	28	10	167	4	1	0	1
5	Беларус	6	6	0	42	30	10	42	36	5	165	4	0	2	0
6-7	Сингапур	6	6	0	42	37	7	42	29	5	162	1	5	0	0
	Великобритания	6	6	0	42	33	8	42	31	6	162	2	3	1	0
8	Унгария	6	6	0	42	37	16	36	23	1	155	2	3	1	0
9-10	Полша	6	6	0	42	25	5	42	35	2	151	1	4	1	0
	Турция	6	5	1	38	37	5	42	12	17	151	2	2	2	0
11	Тайван	6	6	0	42	33	6	42	23	3	149	2	2	2	0
12	Румъния	6	5	1	39	42	2	39	14	9	145	1	4	1	0
13	Босна и Херцеговина	6	5	1	42	25	3	42	29	3	144	3	1	2	0
14-15	Италия	6	5	1	42	32	3	36	27	3	143	1	3	2	0
	Япония	6	6	0	42	30	4	35	21	11	143	2	2	1	1
16-17	Израел	6	6	0	39	35	14	36	14	4	142	2	2	2	0
	Монголия	6	6	0	42	37	0	42	19	2	142	1	2	3	0
18	Хонг Конг	6	6	0	42	37	4	42	10	5	140	0	5	1	0
19	Иран	6	5	1	40	30	2	42	16	7	137	1	3	1	1
20	Бразилия	6	6	0	36	42	3	38	10	5	134	1	3	2	0

	държава	брой			31	32	33	34	35	36	общо	медали			
място			М	Ж								З	С	Б	Г
21	Франция	6	6	0	39	21	5	42	18	8	133	1	3	1	1
22	Сърбия	6	6	0	42	20	14	35	17	4	132	0	4	1	1
23	Канада	6	5	1	37	23	8	42	11	10	131	0	4	1	1
24	Мексико	6	6	0	40	17	4	36	30	2	129	1	2	2	1
25-26	Австрия	6	6	0	38	26	2	29	28	4	127	0	5	0	1
	Казахстан	6	6	0	35	35	0	40	13	4	127	0	3	2	1
27-28	България	6	5	1	42	15	4	42	20	3	126	0	3	2	1
	Гърция	6	6	0	42	21	2	42	15	4	126	1	2	3	0
29-30	Киргизстан	6	6	0	30	21	0	42	27	2	122	1	3	0	2
	Перу	6	5	1	42	25	0	35	16	4	122	0	2	3	1
31-32	Германия	6	5	1	40	27	2	32	19	0	120	0	2	4	0
	Нова Зеландия	6	5	1	42	14	0	42	22	0	120	0	3	3	0
33-34	Малайзия	6	5	1	42	21	1	42	10	2	118	0	2	4	0
	Виетнам	6	6	0	36	26	2	42	8	4	118	0	2	3	1
35-37	Хърватска	6	6	0	40	11	0	42	20	3	116	0	3	2	1
	Словакия	6	4	2	38	15	5	28	29	1	116	1	1	3	1
	Тайланд	6	6	0	38	32	1	35	8	2	116	0	3	1	2
38-40	Армения	6	6	0	35	21	2	40	14	1	113	0	0	5	1
	Австралия	6	2	4	37	21	3	42	9	1	113	1	1	2	2
	Украйна	6	4	2	38	22	1	35	17	0	113	0	2	3	1
41-42	Индонезия	6	6	0	42	17	0	42	9	1	111	1	0	3	2

място	държава	брой			31	32	33	34	35	36	общо	медали			
			М	Ж								З	С	Б	Г
	Саудитска Арабия	6	6	0	39	18	2	42	10	0	111	0	1	4	1
43	Узбекистан	6	5	1	36	20	1	35	18	0	110	0	2	3	0
44	Нидерландия	6	6	0	37	18	0	37	16	1	109	0	1	4	1
45	Грузия	6	6	0	39	15	1	36	15	2	108	1	0	3	1
46-47	Северна Македония	6	6	0	38	12	1	41	13	2	107	1	0	2	3
	Туркменистан	6	6	0	33	15	1	42	15	1	107	0	2	2	2
48	Швейцария	6	5	1	42	12	2	36	14	0	106	1	0	1	4
49	Чехия	6	3	3	36	8	0	42	16	1	103	0	2	2	2
50-51	Филипини	6	6	0	40	13	1	35	13	0	102	0	1	3	2
	Швеция	6	5	1	41	13	1	30	14	3	102	0	1	3	2
52	Литва	5	3	2	35	9	6	30	14	0	94	1	0	2	2
53	Южна Африка	6	4	2	34	8	0	35	16	0	93	0	1	2	1
54	Словения	6	4	2	40	5	0	37	8	2	92	0	1	1	3
55	Естония	6	6	0	30	13	0	29	19	0	91	0	1	1	4
56	Аржентина	6	5	1	36	15	0	17	21	1	90	0	1	3	1
57-58	Кипър	6	4	2	31	9	0	37	9	2	88	0	2	1	3
	Дания	6	5	1	42	4	1	27	14	0	88	0	0	2	4
59-60	Колумбия	6	5	1	35	5	0	35	12	0	87	0	0	2	4
	Латвия	6	6	0	32	6	0	35	14	0	87	0	0	2	4
61	Алжир	6	6	0	30	11	0	36	8	1	86	1	0	0	4
62-62	Финландия	6	4	2	40	6	2	17	19	1	85	0	1	1	3

място	държава	брой			31	32	33	34	35	36	общо	медали			
			М	Ж								З	С	Б	Г
	Норвегия	6	6	0	36	8	0	24	17	0	85	0	0	3	3
64	Молдова	5	4	1	31	8	2	29	14	0	84	0	1	2	2
65	Бангладеш	6	5	1	33	8	0	28	14	0	83	0	0	2	4
66	Коста Рика	6	5	1	29	2	0	35	16	0	82	0	0	2	3
67-69	Белгия	6	6	0	38	11	0	22	9	0	80	0	1	2	1
	Испания	6	6	0	37	17	1	10	13	2	80	0	0	2	3
	Таджикистан	6	6	0	29	8	0	33	9	1	80	0	0	2	3
70-71	Португалия	6	5	1	37	10	2	11	11	0	71	0	0	1	4
	Шри Ланка	6	6	0	42	4	0	17	8	0	71	0	0	2	4
72	Куба	6	4	2	36	0	0	31	0	1	68	0	0	0	5
73-74	Ирландия	6	6	0	34	3	0	22	8	0	67	0	0	0	4
	Тунис	6	6	0	28	4	0	28	7	0	67	0	0	1	3
75-77	Азербайджан	6	5	1	36	10	0	17	1	0	64	0	0	1	5
	Пакистан	6	6	0	28	7	1	19	9	0	64	0	1	1	1
	Сирия	6	6	0	36	7	0	21	0	0	64	0	0	1	4
78	Люксембург	6	2	4	34	2	0	16	8	0	60	0	0	1	3
79	Макао	6	5	1	28	0	0	21	7	0	56	0	0	0	5
80	Албания	6	5	1	19	2	0	29	1	0	51	0	0	1	3
81	Ирак	5	4	1	23	4	0	16	7	0	50	0	0	2	1
82-83	Косово	6	5	1	30	3	0	13	2	0	48	0	0	0	4
	Уругвай	6	5	1	28	1	0	18	1	0	48	0	0	0	3

място	държава	брой			31	32	33	34	35	36	общо	медали			
			М	Ж								З	С	Б	Г
84	Еквадор	6	6	0	19	0	0	13	14	0	46	0	0	1	2
85-86	Доминиканска република	6	6	0	24	0	0	7	8	0	39	0	0	0	3
	Роанда	6	4	2	31	0	0	7	1	0	39	0	0	0	4
87	Тринидад и Тобаго	5	5	0	19	1	0	9	8	0	37	0	0	0	2
88	Исландия	6	4	2	11	1	0	10	13	0	35	0	0	0	2
89	Мианмар	6	4	2	16	0	0	14	0	0	30	0	0	0	3
90	Непал	6	6	0	19	1	0	7	1	0	28	0	0	0	2
91	Боливия	4	3	1	15	2	0	8	0	1	26	0	0	1	1
92	Уганда	6	4	2	10	0	0	11	1	0	22	0	0	0	1
93	Парагвай	4	4	0	10	0	0	9	1	0	20	0	0	0	1
94	Бряг на слоновата кост	6	5	1	14	0	0	4	1	0	19	0	0	0	0
95	Пуерто Рико	3	2	1	15	0	0	1	2	0	18	0	0	0	1
96-97	Чили	2	2	0	10	0	0	0	7	0	17	0	0	0	1
	Ел Салвадор	3	2	1	7	0	0	9	1	0	17	0	0	0	1
98	Никарагуа	1	1	0	7	1	0	7	1	0	16	0	0	1	0
99	Боствана	6	5	1	14	0	0	1	0	0	15	0	0	0	1
100-101	Лихтенщайн	1	1	0	7	0	0	7	0	0	14	0	0	0	1
	Венецуела	3	2	1	6	0	0	4	4	0	14	0	0	0	0
102	Панама	1	1	0	3	0	0	7	0	0	10	0	0	0	1
103	Бутан	5	5	0	4	0	0	1	3	0	8	0	0	0	0
104	Кения	5	5	0	6	0	0	0	1	0	7	0	0	0	0

	държава	брой			31	32	33	34	35	36	общо	медали			
място			М	Ж								З	С	Б	Г
105-106	Гана	6	2	4	4	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
	Оман	6	0	6	2	0	0	0	2	0	4	0	0	0	0
107-108	Хондурас	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	Обединени Арабски Емирства	4	2	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

З А Д А Ч И

вторник, 16 юли 2024 г.

Задача 1. Да се намерят всички реални числа α, такива че за всяко естествено число n числото $\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor$ е цяло и се дели на n.

(*Забележка*: с долна цяла част $\lfloor z\rfloor$ е означено най-голямото цяло число, по-малко или равно на z. Например, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$, а $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2.9\rfloor = 2$.)

Предложена от Santiago Rodríguez, Колумбия

Задача 2. Да се намерят всички двойки естествени числа (a, b), за които съществуват естествени числа g и N, такива че равенството

$$\text{НОД}(a^n + b,\ b^n + a) = g$$

е изпълнено за всички цели числа $n \geqslant N$.

(*Забележка*: с НОД(x, y) е означен най-големият общ делител на целите числа x и y.)

Предложена от Valentio Iverson, Индонезия

Задача 3. Нека $a_1, a_2, a_3, \dots$ е безкрайна редица от естествени число и нека N е естествено число. Дадено е, че за всяко $n > N$ числото a_n е равно на броя срещания на числото a_{n-1} в редицата $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Да се докаже, че поне една от редиците $a_1, a_3, a_5, \dots$ и $a_2, a_4, a_6, \dots$ е периодична от известно място нататък.

(*Забележка*: една безкрайна редица $b_1, b_2, b_3, \dots$ е периодична от известно място нататък, ако съществуват естествени p и M, такива че $b_{m+p} = b_m$ за всяко $m \geqslant M$.)

Време за работа: 4 *часа и* 30 *минути.*
Всяка задача се оценява със 7 *точки.*

сряда, 17 юли 2024 г.

Задача 4. Нека ABC е триъгълник, за който $AB < AC < BC$. Да означим с ω вписаната в него окръжност, а с I нейния център. Нека X е точка върху правата BC, различна от C, и такава, че правата през X, успоредна на AC, се допира до ω. Аналогично, нека Y е точка върху правата BC, различна от B, и такава, че правата през Y, успоредна на AB, се допира до ω. Нека правата AI

пресича за втори път описаната окръжност около триъгълник ABC в точка $P \neq A$. Нека K и L са средите съответно на отсечките AC и AB. Да се докаже, че $\angle KIL + \angle YPX = 180^0$.

Предложена от Dominik Burek, Полша

Задача 5. Охлювът Турбо играе игра върху дъска с 2024 реда и 2023 стълба. В 2022 от клетките на дъската има скрити чудовища. Първоначално, Турбо не знае къде се намира нито едно от чудовищата, но знае, че има точно едно чудовище във всеки ред с изключение на първия и последния и че има най-много едно чудовище във всеки стълб. Турбо прави поредица от опити да стигне от първия до последния ред. При всеки опит той избира клетка върху първия ред, от която стартира и след това на всеки ход последователно се придвижва от текущата клетка към съседна клетка с обща страна. (Позволено му е да се връща в клетка, в което вече е бил.) Ако стигне до клетка, в която има чудовище, неговият опит приключва и той се транспортира обратно до първия ред, откъдето започва нов опит. Чудовищата не се движат и Турбо помни дали в клетките, които вече е посещавал, има или няма чудовища. Ако той достигне коя да е клетка от последния ред, опитът му приключва успешно и той печели играта. Да се определи минималното n, такова че охлювът Турбо има стратегия, гарантираща му достигане до последния ред за най-много n опита независимо от разположенията на чудовищата.

Предложена от Cheuk Hei Chu, Хонг Конг

Задача 6. Нека Q е множеството на рационалните числа. Една функция $f : Q \to Q$ се нарича *чиста,* ако е изпълнено следното свойство: за всеки $x, y \in Q$ е в сила поне едно от следните равенства $f(x + f(y)) = f(x) + y$ или $f(f(x) + y) = x + f(y)$. Да се докаже, че съществува цяло число c, така че за всяка *чиста* функция f съществуват най-много c различни рационални числа от вида $f(r) + f(-r)$, когато r пробягва рационалните числа,. Да се намери най-малката възможна стойност на c.

Време за работа: 4 *часа и* 30 *минути*.
Всяка задача се оценява със 7 *точки*.

РЕШЕНИЯ

Решение на задача 1. Да означим сумата от условието с $f(\alpha)$. Забелязваме, че $f(x+\alpha) = f(x) + f(\alpha)$ за всички цели числа x. Ако α е цяло число, то

$$f(\alpha) = \alpha + 2\alpha + \ldots + n\alpha = \frac{n(n+1)}{2}\alpha,$$

което се дели на n (за всяко n) само за четни стойности на α.

Ще докажем, че за всички други стойности на α условието не е изпълнено. Записваме $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}$ и разглеждаме два случая в зависимост от четността на $\lfloor \alpha \rfloor$.

Ако α е от вида $2k + \{\alpha\}$, то $f(\alpha) = f(2k + \{\alpha\}) = f(2k) + f(\{\alpha\})$, което се дели на n, само ако $f(\{\alpha\})$ е кратно на n. Нека m е най-малкото естествено число, за което $m\alpha \geq 1$. Тогава за $n = m$, $f(\{\alpha\}) = 0 + 0 + \ldots + 0 + 1 = 1$, което не се дели на n.

Ако α е от вида $2k + 1 + \{\alpha\}$, то $f(\alpha) = f((2k+2) + (\{\alpha\} - 1))$ и аналогично на горното нека m е най-малкото естествено число, за което $m(\{\alpha\} - 1) < -1$. Получаваме, че за $n = m$, $f(\{\alpha\} - 1) = -1 - 1 - 1 \ldots -2 = -(n+1)$, което не се дели на n.

Заключаваме, че отговорът на задачата е: всички четни числа α.

Решение на задача 2. Ако $(a, b) = (1,1)$, редицата $(a^n + b,\ b^n + a)$ се състои само от двойки и очевидно изпълнява условието. Ще докажем, че други стойности няма. Ще изберем подходящо число Q, взаимно просто с a и с b, за което можем да изчислим няколко последователни члена на редицата по $\bmod Q$. Да изберем голямо n, кратно на $\varphi(Q-1)$, в частта на редиците, която е стационарна:

$$a^{n+1} + b \equiv a + b \equiv b^{n+1} + a \ (modQ)$$
$$a^n + b \equiv 1 + b \ (modQ)$$
$$b^n + a \equiv 1 + a \ (modQ)$$
Ако можем да изберем такова Q, което дели членовете на редицата след като стане стационарна, от горните сравнения получаваме
$$0 \equiv a + b \equiv (a+1) + (b+1) - 2 \equiv -2(modQ),$$
откъдето единствено $Q = 2$.
Остава да забележим, че:
$$a^{n-1} + b \equiv \frac{ab+1}{a} (modQ)$$
$$b^{n-1} + a \equiv \frac{ab+1}{b} (modQ)$$
и подходяща стойност на Q, която изпълнява изискванията по-горе, е $Q = ab + 1$.
Оттук получаваме, че $ab + 1 = 2$, т.е. $(a, b) = (1,1)$.

Решение на задача 3. Да забележим, че в редицата има число, което се среща безброй пъти. Ако такова не съществува, то редицата съдържа неограничено големи числа – всяко от тях, по-голямо от първоначалните N члена, е последвано от 1-ца (тъй като то се среща точно веднъж досега). Тогава 1-цата присъства безброй пъти, което е противоречие. Нека $M = max(a_1, a_2, \ldots, a_n) + 1$. Ще докажем, че всяко число $x \geq M$ се среща в редицата не повече от $M - 1$ пъти. Ако това не е така, то да разгледаме първия момент, когато някое x се среща за M-ти път. Всеки от тези пъти числото преди x се е срещало x пъти, т.е. най-малко M пъти. Следователно има поне M числа, които са се срещали поне M пъти преди появата на x. Това е противоречие с избора на x. От горните разсъждения следва, че има само краен брой числа (но поне едно), които се появяват безброй пъти. Нека X е най-голямото от тези числа. От свойството на редицата е ясно, че всяко от числата, по-малки от X, също се среща безброй пъти. Тъй като X+1 се среща краен брой пъти, то има само краен брой числа, които се срещат повече от X пъти. Нека най-голямото от тези числа е Y, като очевидно $Y \geq X$. Ще наричаме числата „големи“, ако са по-големи от Y, „малки“, ако са не по-големи от X, и „средни“, ако не са нито малки, нито големи. От горните разсъждения следва, че малките числа се срещат безброй пъти, а големите числа се срещат не повече от X пъти. Оттук нататък да гледаме редицата от момент, в който всички „средни“ числа са изчерпани и до който всички „малки“ числа са се появили поне $max(X, N) + 1$ пъти. От този момент нататък в редицата не може да има две съседни „големи“ или две съседни „малки“ числа. Да забележим също така, че „малкото“ число b след всяко голямо число B е равно точно на броя „малки“ числа, които са се появили поне B пъти до този момент.

Редицата може да се представи като динамично променяща се (X+1)-орка от числа $(b_1, b_2, \ldots, b_X, j)$, където във всеки момент b_i е равно на броя срещания на числото i, а j (което ще наричаме *индекс*) е последното „малко“ число, появило се в редицата. Тези стойности се променят на всеки втори елемент от редицата т.е. „големите“ числа могат да се игнорират. Ще докажем, че редицата от „малки“ числа (или индексите), която е подредица или на $a_2, a_4, a_6, \ldots$, или на $a_1, a_3, a_5, \ldots$,), става периодична. Ако успеем да докажем, че $|b_i - b_j| \leq C$ за някаква стойност на C, това означава, че индексите, които са еднозначна функция на разликите от съседни стойности $b_i - b_{i-1}$ (както и че следващият индекс е еднозначно определен от тези разлики), стават периодични, тъй като броят на различните стойности на $(b_2 - b_1, b_3 - b_2, \ldots, b_X - b_{X-1})$ е краен (т.е. когато се повтори за първи път, следващият индекс също се повтаря и така до края). Достатъчно е да докажем, че $|b_{i+1} - b_i|$ е ограничено (неравенството $|a - b| + |b - c| > |a - c|$ гарантира, че всички други разлики са също ограничени).

Всяко достатъчно голямо число, което се среща $i+1$ пъти, трябва да се е срещало и i пъти в някой предишен момент след първоначалните N члена на оригиналната редица. Оттук следва, че съществува константа C, която ограничава $b_{i+1}-b_i$ отгоре. Да допуснем, че за някое r, $b_{r+1}-b_r$ е неограничена отдолу. Тъй като стойността на $b_{r+1}-b_r$ се променя най-много с 1-ца, то трябва да има поне една промяна, където тази разлика намалява с поне $-(X-1)C$. Оттук, поради ограничеността отгоре на съседните разлики, следва, че в конкретния момент на „скока" надолу новият индекс на редицата е точно r и е изпълнено следното неравенство: $min(b_1,\dots,b_r) > max(b_{r+1},\dots,b_X)$. От правилата за промяна на b_i това означава, че само стойностите $b_1, b_2, \dots, b_r$ могат да се увеличават от този момент нататък и следователно например стойността на b_X е ограничена отгоре, което противоречи на това, че X се среща безброй пъти в оригиналната редица. Доказателството е завършено и редицата от малки числа задължително става периодична от някой момент нататък.

Решение на задача 4. Да изберем точка *M* върху ъглополовящата *AI*, такава че *I* е среда на отсечката *AM*. Тъй като *KI* и *IL* са средни отсечки съответно в триъгълниците *ABM* и *AMC*, то $\angle KIL = \angle BMC$. Ако допирателните към вписаната окръжност през *X* и през *Y* се пресичат в точка *N*, то от симетрията относно ъглополовящата *AI* и поради успоредността на *NX* и *AC*, на *NY* и *AB*, следва че фигурата, образувана от *NX*, *NY*, *AB*, *AC* е с център *I* на симетрия, откъдето следва, че *N* лежи на *AI* и *AI* = *IN*. Следователно *N* и *M* са една и съща точка. Имаме:

$$\angle MYC = 180^0 - \angle ABC = 180^0 - \angle APC,$$

Откъдето $\angle MYC + \angle APC = 180^0$ и следователно *MYCP* може да се впише в окръжност. Аналогично за *BXMP*. Оттук получаваме:

$$\angle KIL + \angle YPX = \angle BMC + \angle YPM + \angle XPM = \angle BMC + \angle YCM + \angle XBM = 180^0,$$

тъй като това са трите ъгъла в триъгълника *BMC*.

Решение на задача 5. Ще докажем, че с три опита винаги можем да стигнем до последния ред. Два опита не са достатъчни, защото ако уцелим чудовище във втория ред, третият ред също може да съдържа чудовище в новата колона от втория опит. Стратегията с три опита можем да започнем с пълно изследване на втория ред, докато не намерим чудовището. Ако то се намира в ъглова клетка, без значение да кажем в десния ъгъл, при втория опит стигаме до клетката отляво на чудовището и правим ходове наляво надолу, докато стигнем или до чудовище, или до първата колона. Ако стигнем до чудовище, в третия опит стигаме до клетката отдясно на това чудовище (по изминатия вече маршрут) и отиваме в същия ред с ходове надясно до последната колона (в която не може да има други чудовища). После се спускаме до долу.

Ако чудовището от втория ред се намира в клетка, която не е ъглова, пробваме два маршрута, единият от които трябва да е без чудовища. От клетките вляво и вдясно на чудовището се спускаме един ред надолу, после минаваме към колоната на чудовището и се спускаме надолу до последния ред. Тъй като тази колона няма повече опасности, единствено можем да срещнем проблем на третия ред, но тогава алтернативният маршрут, започващ от другата страна на чудовището, ще бъде безопасен.

Решение на задача 6. Ще докажем, че търсената стойност на c е 2. Пример за две стойности е функцията $f(x) = 2\lfloor x\rfloor - x$.

$$f(0) + f(-0) = 0,\ f(0.1) + f(-0.1) = -0.1 - 1.9 = -2.$$

$$f(x+f(y)) = f(x + 2\lfloor y\rfloor - y) = 2\lfloor x + 2\lfloor y\rfloor - y\rfloor - x - 2\lfloor y\rfloor + y$$
$$= 2\lfloor x - y\rfloor + 2\lfloor y\rfloor - x + y$$

Тъй като или $\lfloor x-y \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor$, или $\lfloor y-x \rfloor + \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$, получаваме, че тази функция изпълнява условието.

Остава да докажем, че повече от две стойности за $f(x)+f(-x)$ не са възможни. Да забележим, че функцията f е инективна. При $x=y$ от условието получаваме, че $f(a+f(a)) = a + f(a)$. Ако имаме $f(a)=f(b)$ и без ограничение

$$f(a+f(b)) = f(a)+b, \text{ то}$$

$$f(a)+a = f(a+f(a)) = f(a+f(b)) = f(a)+b$$

и следователно $a=b$.

Нека a и b са такива, че $f(a+f(b)) = f(a)+b$. Да изберем

$$(x,y) = (a+f(b), -b).$$

Тогава

$$x+f(y) = a+f(b)+f(-b) \text{ и } y+f(x) = f(a+f(b)) - b = f(a).$$

Поради инективността, ако за x и y важи първата зависимост от условието, то

$$f(b)+f(-b) = 0.$$

Ако важи втората зависимост, то $f(f(a)) = a+f(b)+f(-b)$.

Накрая да допуснем, че има различни x и y, за които

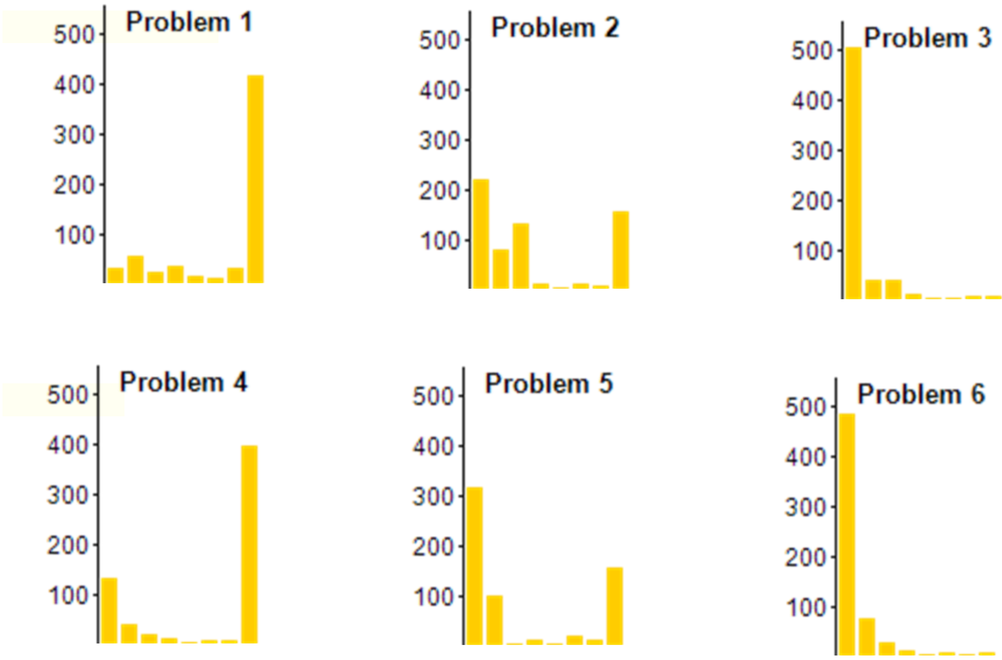
$$f(x)+f(-x) \text{ и } f(y)+f(-y)$$

са различни от 0. Без ограничение нека $f(x+f(y)) = f(x)+y$. Тогава

$$f(x)+f(-x) = f(f(x)) - x = f(y)+f(-y)$$

Това означава, че има само една ненулева възможна стойност на $f(x)+f(-x)$ и решението е завършено.

Предлагаме официалната статистика за представянето на участниците в олимпиадата по всяка от шестте задачи от темата. Върху абсцисната ос са нанесени възможните резултати от 0 до 7 точки включително, а върху ординатната ос – броят на учениците със съответния точков резултат. Данните от графиките са уточнени в таблицата.



	Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**
среден брой точки	5,570	2,544	0,437	4,854	2,246	0,396
точки	**Задача 1**	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**
0	29	217	501	129	316	482
1	54	80	40	39	97	76
2	22	129	38	19	3	27
3	35	10	10	10	9	9
4	13	2	3	4	1	2
5	12	9	2	8	18	7
6	31	6	7	7	11	1
7	413	156	8	393	154	5
	609	**609**	**609**	**609**	**609**	**618**

Следващата 66. Международна олимпиада по математика ще се проведе от 10 до 20 юли 2025 г. в градския район Съншайн Коуст на Австралия.